Numerik von Optionsgeschäften unter Zuhilfenahme der Kombinationstechnik

DIPLOMARBEIT

zur Erlangung des akademischen Grades
Diplom Wirtschaftsmathematiker
FRIEDRICH-SCHILLER-UNIVERSITÄT JENA
Fakultät für Mathematik und Informatik
eingereicht von Stefan Fleischer
geb. am 23.04.1979 in Riesa
Betreuer: Prof. Dr. Gerhard Zumbusch

Jena, 05.01.2005

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr. Gerhard Zumbusch und Dipl.-Math. Guido Spahn für ihre sehr wertvolle Unterstützung bei der Erarbeitung meiner Diplomarbeit. Außerdem möchte ich mich bei meinen Mitkommilitonen Jana Blömer, Mike Jäger und Marco Rosenthal für ihre Bereitschaft bedanken, dass sie meine Diplomarbeit korrekturgelesen haben.

Zusammenfassung

Für europäische und amerikanische Optionen sowie für zwei- und dreidimensionale Basket-Optionen wird aus den Black-Scholes-Gleichungen der faire Preis numerisch berechnet. Da in den meisten Fällen keine geschlossenen Lösungsformeln exisiteren, müssen die multivariaten parabolischen Optionspreisaufgaben numerisch gelöst werden. Die Eindeutigkeit der Gleichungen wird über die Anfangs- und Randwertprobleme garantiert. Das Berechnen von Näherungslösungen für diese Differentialgleichungen geschieht dann durch Diskretisierung der Gleichungen und durch das Lösen der daraus resultierenden Gleichungssysteme. Die Diskretisierung der parabolischen Gleichungen erfolgt mit Finiten Differenzen auf stark anisotropen, regulären und rechtwinkligen Vollgittern. Bei amerikanischen Optionen wird das Hindernisproblem über das Projektions-Successive-Overrelaxation-Iterationsverfahren numerisch gelöst. Die Basket-Optionen beruhen auf Advektions-Diffusions-Reaktions-Gleichungen. Um den numerischen Aufwand vertretbar zu halten, wird die *Kombinationstechnik* basierend auf der Dünngitter-Theorie eingesetzt. Der numerische Aufwand bei steigender Problemdimension kann dabei substantiell reduziert werden, ohne den Informationsgehalt der Lösung wesentlich zu verschlechtern. Damit kann entscheidend dem "Fluch der Dimensionen" entgegengewirkt und die Komplexität der Algorithmen verbessert werden. Die unterschiedlichen Lösungen auf den stark anisotropen, regulären, rechtwinkligen und gröberen Dünngittern werden miteinander geeignet linear kombiniert und liefern, bis auf eine logarithmische Dämpfung, denselben numerischen Fehler wie die numerische Lösung auf einem feineren isotropen Referenzvollgitter. Anhand von empirischen Ergebnissen soll die vorgestellte Theorie bestätigt werden.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **1**
1.1 Motivation der Problemstellung . . . 1
1.2 Aufbau der Diplomarbeit . . . 3
1.3 Grundlagen der einzelnen Teildisziplinien . . . 4
1.3.1 Optionspreistheorie . . . 4
1.3.2 Stochastische Grundlagen . . . 4
1.3.3 Grundlagen der Numerik . . . 8

2 Numerische Behandlung von europäischen und amerikanischen Optionen **11**
2.1 Abgrenzung beider Optionstypen . . . 11
2.2 Das eindimensionale Black-Scholes-Modell . . . 11
2.3 Transformation auf die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung . . . 14
2.4 Numerik europäischer Optionen . . . 16
2.4.1 Aufstellen des resultierenden linearen Gleichungssystems . . . 16
2.4.2 Konvergenz des Finiten-Differenzen-Verfahrens . . . 18
2.5 Numerik amerikanischer Optionen . . . 20
2.5.1 Das Hindernisproblem bei amerikanischen Optionen . . . 20
2.5.2 Approximation mittels Finiter Differenzen . . . 23
2.5.3 Das Projektions-SOR-Verfahren . . . 23
2.6 Europäische und amerikanische Optionen im Vergleich . . . 24

3 Numerik von Basket-Optionen **27**
3.1 Einsatzbereiche von Basket-Optionen . . . 27
3.2 Portefeuillediversifikation durch Basket-Optionen . . . 27
3.3 Multivariate Black-Scholes-Gleichung . . . 28
3.4 Transformation auf eine Advektions-Diffusions-Reaktions-Gleichung . . . 30
3.5 Aufstellen des korrespondierenden linearen Gleichungssystems . . . 32

4 Die Kombinationstechnik **39**
4.1 Grundsätzliches über die Kombinationstechnik . . . 39
4.2 Theorie der Kombinationstechnik . . . 40
4.2.1 Dünngitter . . . 40
4.2.2 Prinzip der Kombinationstechnik . . . 44
4.3 Effizienz der Dünngitter-Technik . . . 48
4.4 Exponentieller Abfall der hierarchischen Überschüsse . . . 51
4.5 Vergleich von Vollgitter- und Kombinationslösung . . . 53

5 Anwendung der Kombinationstechnik **55**
5.1 Wichtige Berechnungsformeln . . . 55
5.2 Zweidimensionale Probleme bei europäischen Optionen . . . 57
5.2.1 Implementierung des Algorithmus für europäische Optionen . . . 57
5.2.2 Der europäische Call . . . 59

5.2.3 Schranken des Verfahrens für europäische Optionen 62
5.2.4 Der europäische Put 63
5.3 Zweidimensionale Probleme bei amerikanischen Optionen 64
5.3.1 Der Kernalgorithmus für amerikanische Optionen 64
5.3.2 Der amerikanische Call 66
5.3.3 Der amerikanische Put 67
5.4 Höherdimensionale Probleme bei Basket-Optionen 69
5.4.1 Numerische Stabilität 69
5.4.2 Der Basisalgorithmus für Basket-Optionen 70
5.4.3 Der dreidimensionale Fall für Basket-Optionen 72
5.4.4 Der vierdimensionale Fall für Basket-Optionen 75

6 Schlussbetrachtungen und Ausblick **79**

Literaturverzeichnis **80**

Anhang: Tabellen für eine Basket-Option auf drei Aktien **83**

1 Einleitung

1.1 Motivation der Problemstellung

“In Marktwirtschaften gibt es organisierte Märkte, die unterschiedliche Präferenzen und Strategien bei der Verfolgung von individuellen Zielen entfalten. Börsen vereinigen jahrhundertealte Erfahrungen mannigfaltiger Handelsrisiken, die in zahllosen sicherheitsstiftenden abgestimmten Maßnahmen ihren Niederschlag gefunden haben.“[1] Durch die bahnbrechenden Arbeiten von Black, Scholes und Merton aus den Siebzigerjahren und das Aufkommen neuer Informationsinfrastrukturen, wie z.B. dem Internet, erklommen die Finanzmärkte die nächste Stufe der Evolutionsleiter. Die rasche Entwicklung der Finanzmärkte brachte auch realwirtschaftliche Effekte mit sich. So ist das beispiellose Wirtschaftswachstum der US-amerikanischen Volkswirtschaft in den Neunzigerjahren zu einem erheblichen Teil auf die Finanzinnovationen der amerikanischen Banken- und Investmentbranche zurückzuführen. Für die Zukunft gilt es, nach neuen Handelsstrategien und Finanzprodukten zu suchen, die dabei helfen, Finanzmarktinstabilitäten zu vermeiden. Negative, aber typische Auswirkungen der Überhitzung des letzten Börsenbooms, durch die New-Economy-Euphorie hervorgerufen, waren schlagartige Vermögensvernichtungen, nachdem die Börsenblase im Zuge der Veränderungen der geopolitischen Lage und der Abschwächung der US-Konjunktur zu platzen begann.

Die mathematische Durchdringung der Finanzmarktarchitektur hat zum Ziel, dem Finanzmarktverhalten mehr Rationalität und damit mehr Stabilität zu geben. Ein herausgegriffener Schwerpunkt des kompakten Theoriengebäudes ist die Bewertung von Finanzderivaten. Unter Finanzderivaten oder derivativen Finanzinstrumenten (derivatives, derivative securities oder contingent claims) versteht man Anlageformen, die von einfacheren Finanzinstrumenten abgeleitet werden. Sie stellen völlig neue Herausforderungen an die Analysis, Stochastik und Numerik. Gegenstand dieser Arbeit ist die Modellierung und numerische Bewertung komplexer derivativer Finanzinstrumente. Dabei widmet sich die Diplomarbeit der numerischen Lösung multivariater parabolischer Differentialgleichungen, die aus der Optionspreistheorie hervorgegangen sind. Banken und Versicherungen benötigen immer ausgefeiltere Finanzprodukte, um die Risiken der Kapitalmärkte meistern zu können.

Die Großbanken berechnen den “Fair Value“ eines Optionsgeschäftes und legen darauf eine Gewinnspanne für ihre eigene Investment-Sparte. Oder die Kreditinstitute und Versicherungen sind selbst daran interessiert, im Zuge der Auflagen durch die Finanzmarktaufsichtsbehörden[2] ihre Risiken besser zu kalkulieren und zu streuen. Dann wird für die institutionellen Anleger die Evaluierung und Entwicklung neuer Finanzderivate zu einem entscheidenden strategischen Wettbewerbsvorteil gegenüber ihren Mitkonkurrenten. Eine einwandfreie und korrekte Marktbewertung von Finanzprodukten dient der reibungslosen Preisfindung. Des Weiteren können die Preise korrekt in den Parallelmärkten gestellt werden, ohne dass es zu Preisschocks auf Kassa- oder Terminmärkten kommen kann, die eine Arbitrage ermöglichen oder gar ganz die Märkte in ihren Anpassungs- und Koordinationsmechanismen aushebeln.

[1] Zitat entnommen aus [Usz95] S.11.
[2] BASEL II oder Solvency II

Diese Arbeit konzentriert sich vor allem auf den theoretischen Aspekt der Optionsbewertung unter mathematisch-numerischen Effizienzgesichtspunkten. Zu Beginn wird das Black-Scholes-Modell eingeführt. Auf diesem Fundament aufbauend wird die Numerik von Optionsgeschäften vorgestellt. Zentralen Einsatz findet in der Diplomarbeit die *Kombinationstechnik* zur mathematisch-effizienteren Berechnung partieller Differentialgleichungen, die aus den Optionspreisformeln resultieren. Bei hochdimensionalen parabolischen Gleichungen für Optionsgeschäfte ist eine numerische Auswertung nicht mehr ohne weiteres möglich. Es sei denn, man kann den exponentiellen numerischen Aufwand bei steigender Problemdimension signifikant reduzieren, ohne den Informationsgehalt der erhaltenen Lösung zu verwässern.

Ziel dieser Arbeit ist es, parabolische Gleichungen, die aus der mehrdimensionalen Optionspreistheorie hervorgegangen sind, durch den praktischen Einsatz der *Kombinationstechnik* numerisch effizient zu lösen. Dabei kann für jeden diskreten Zeitpunkt und jede diskrete Kurskombination der Wert der Option angegeben werden. Die Idee der *Kombinationstechnik* basiert auf der Dünngitter-Theorie. Dünngitter sind ein besonders wirkungsvolles Konzept zur Reduktion des Speicher- und Rechenaufwandes bzw. zur Erhöhung der Lösungsgenauigkeit bei gleichem numerischem Aufwand. Eine hinreichend glatte Funktion auf dem Einheitsquadrat auf einem äquidistanten Gitter wird mit $O(n^2)$ Punkten interpoliert. Solche Gitter werden in Zukunft Vollgitter genannt. Ein Dünngitter hat im Gegensatz zu einem vollen Gitter nur $O(n \log n)$ Interpolationspunkte. Der Fehler, der bei einer Interpolation auf einem Dünngitter entsteht, erfährt eine Dämpfung in Höhe von log n gegenüber der Interpolation auf dem Vollgitter. Damit wird deutlich, dass trotz einer Fehlerdämpfung in etwa annäherend die gleiche Genauigkeit bei wesentlich geringerem Speicher- und Rechenaufwand erhalten werden kann.

Es wird sich zeigen, dass die *Kombinationstechnik* schon im zweidimensionalen Fall im Vergleich zur Vollgitterlösung Effizienzvorteile zur Lösung von Optionspreisaufgaben mit sich bringt. Dementsprechend steigt mit zunehmender Problemdimension der Effizienzgewinn deutlich an. In der Abbildung 1.1 ist für den zweidimensionalen Raum erkennbar, dass ein Vollgitter mehr Freiheitsgrade trägt als ein Dünngitter. Trotzdem wird noch dasselbe Problem beschrieben. Über einen Basiswechsel für denselben Funktionenraum gelangt man von der Vollgitter- auf die Dünngitterdarstellung. Der Fehler, der dabei auftritt, ist zu vernachlässigen, d.h. der Trade Off zwischen Reduzierung der Problemdimension und der Erhöhung des Lösungsfehlers ist asymptotisch gesehen marginal.

Die kontinuierlichen Differentialgleichungen der Optionspreistheorie werden mittels der Finiten Differenzen approximiert und in ein resultierendes lineares Gleichungssystem überführt. Dabei wird als Semi-Diskretisierung das Crank-Nicolson-Verfahren eingesetzt. Dies sichert später die Behandlung von anisotropen Gittern bei der *Kombinationstechnik*. Dem folgend werden verschiedene gröbere Gitter in einer geeigneten Linearkombination miteinander zusammengefasst, um so eine approximative Lösung auf einem Dünngitter zu erhalten, welches weniger Gitterpunkte enthält, aber bis auf eine logarithmische Fehlerdämpfung die Lösungsqualität im Vergleich zu einem Vollgitter nicht weiter beeinträchtigt. Die Implementierung der verwendeten Algorithmen und die numerischen Resultate der *Kombinationstechnik* in Form von Tabellen und Abbildungen stellen den Schwerpunkt der Diplomarbeit dar.

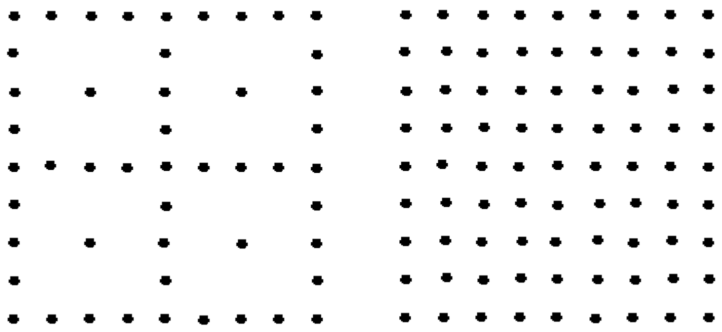

Abbildung 1.1: Beispiel eines Dünn- und Vollgitters mit $n = 2^3$.

Während der Diplomarbeit stellte der Diplomant fest, dass in der einschlägigen Fachliteratur im vergangenen Jahr eine Dissertation "Numerische Methoden für hochdimensionale parabolische Gleichungen am Beispiel von Optionspreisaufgaben" erschienen war[3]. Die vorliegende Diplomarbeit ist unabhängig von dieser Dissertation entstanden.

1.2 Aufbau der Diplomarbeit

Kapitel 1 stellt die wesentlichen Grundlagen aus den Teildisziplinen Finanzierung, Stochastik und Numerik zusammen. Auf diesem bereitgestellten mathematischen Begriffsapparat baut die weitere Arbeit auf. Das anschließende **2. Kapitel** beschäftigt sich mit der elementaren Diskretisierung der eindimensionalen Black-Scholes- bzw. parabolischen Gleichung für europäische Optionen und liefert darüber hinaus das finanzmathematische Konzept der Black-Scholes-Gleichung im einfachsten Fall. Für amerikanische Optionen wird eine Ungleichung gelöst. Betriebswirtschaftlich gesehen besteht in diesem Kapitel das Ziel, den Wert der Optionsgrundtypen zu verschiedenen diskreten Zeitpunkten und diskreten Kursen numerisch zu ermitteln. Aufbauend auf dem Grundverständnis der Numerik europäischer Optionen können durch Erweiterungen und Modifikationen amerikanische Optionen sowie Basket-Optionen numerisch behandelt werden. Im darauf folgenden **3. Kapitel** werden multivariate parabolische Gleichungen in Form von Basket-Optionen behandelt. Die Diskretisierung der kontinuierlichen Differentialgleichung sowie der Einfluss der Anfangs- und Randwerte auf das Lösungsverhalten der Basket-Optionen werden in diesem Kapitel abgehandelt. Die beiden Kapitel 4 und 5 stellen das Zentrum der Diplomarbeit dar. Mit der Herausarbeitung der *Kombinationstechnik* aus der Dünngitter-Theorie beschäftigt sich das **4. Kapitel**. Dafür wird die mathematische Modellierung der Räume und Gitter vorgestellt. Auf die wesentlichen Begriffe und Aussagen der Dünngitter-Theorie wird dabei eingegangen. Dabei wird die Problemreduktion der *Kombinationstechnik* unter einer vertretbaren Informationsdämpfung bewiesen. Im **5. Kapitel** werden für die multivariaten parabolischen Differentialgleichungen die Implementierungen angegeben und empirische Tests durchgeführt, um an anschaulich präparierten Beispielen die Wirkungs- und Arbeitsweise der *Kombinationstechnik* zu verdeutlichen. Die Programmroutinen sind in MATLAB geschrieben und ausführlich getestet worden. Abbildungen und Interpretationen zu den einzelnen Optionstypen runden die praktische Betrachtungsweise ab. Das **6. Kapitel** fasst in einem abschließenden Resümee die gewonnenen Ergebnisse und Erkenntnisse übersichtlich zusammen und bietet einen Ausblick auf weitere Anwendungsmöglichkeiten.

[3] [Reis04]

1.3 Grundlagen der einzelnen Teildisziplinien

1.3.1 Optionspreistheorie

Bedingte Termingeschäfte: Optionen sind ein Instrument zur Koordinierung und gegenseitigen Ergänzung von Menschen mit individuellen Einschätzungen der Zukunft, verschiedenartigen Ansichten, Fähigkeiten und Neigungen sowie mit unterschiedlicher Risikobereitschaft. Eine europäische Option mit dem Ausübungspreis K gibt dem Inhaber der Option (Holder) das Recht, zu einem bestimmten Termin in der Zukunft eine vertraglich vereinbarte Menge einer zugrundeliegenden Ware (Underlying, Basiswert oder Asset), meistens in der Notation S zum Ausübungspreis (strike) zu kaufen (Call) oder zu verkaufen (Put). Zu einem Optionsgeschäft gehören immer zwei Vertragspartner. Der Verkäufer bzw. der Stillhalter, der eine Option emittiert (to write a put - Stillhalter in Geld, to write a call - Stillhalter in Stücken), hat die Pflicht entsprechend so zu reagieren, wie es der Inhaber der Option wünscht. Für amerikanische Optionen gelten dieselben oben stehenden Aussagen mit nur einer wesentlichen Modifikation: Statt eines festvereinbarten Ausübungstermins wird vertraglich ein Ausübungsfenster vereinbart. Dieser Unterschied hat deutliche Auswirkung auf die numerische Behandlung beider Optionstypen. Als Beispiel für die numerische Behandlung von exotischen Optionen wurden die Basket-Optionen aufgenommen. Dabei bezieht sich eine Option auf einen Korb von verschiedenen Basiswerten.

Bei "unbedingten Termingeschäften" (Futures oder Forwards)[4] besteht für den Käufer des Terminkontrakts die Pflicht zur Ausübung des Termingeschäftes. Der Handel mit Termingeschäften hat vielseitige Grundmotive. Eine Intention ist die **Spekulation** und der Leverage-Effekt. Je volatiler die Entwicklung des Basiswertes um den Ausübungspreis ist, um so mehr kann der Wert des Termingeschäftes steigen. Mit einem kleineren Engagement am Termingeschäft können höhere Gewinnmargen erzielt werden als bei direkter Partizipation am Basiswert. Spekulatives Verhalten auf kapitalisierten Märkten muss nicht unbedingt negativ sein, dient es doch der Preisglättung über einen längeren Zeitraum hinweg. Mittels **Hedging** ist der Portefeuille-Inhaber bestrebt, das innewohnende Risiko von verschiedenartigen Handelspositionen zu verringern oder gar ganz auszuschalten. Dabei werden die Korrelationen der einzelnen Positionen ausgenutzt. Ein dritter Grund ist die Ausnutzung von **Arbitrage** (risikoloser Gewinn bei Finanzprodukten). Arbitrage ist höchst selbstzerstörerisch, d.h. bietet sich eine Möglichkeit für die Arbitrage, dann schließt sie sich innerhalb kürzester Zeit[5].

Der Preis des Futures hängt linear vom Underlying ab. Bei Optionspreisaufgaben geht das Underlying nicht-linear ein. Dies hat Auswirkungen auf die Hedgingformeln und -strategien für das Senken des inhärenten Risikos von Finanzmarktgeschäften. Modernes Risikomanagement baut auf einem Bündel von verschiedensten Finanzderivaten auf.

1.3.2 Stochastische Grundlagen

Wir betrachten das Aktienkursmodell

$$dS(t) = (\mu - \delta)S(t)dt + \sigma S(t)dW(t) \tag{1.1}$$

mit der Volatilität (bzw. Standardabweichung) $\sigma > 0$, dem Erwartungswert $\mu \in \mathbb{R}$, der Dividende $0 \leq \delta \leq r$ mit dem Kapitalmarktzins $0 \leq r \leq 1$ und dem probabilistischen Kurs

[4] [Hull00] stellt einen reichhaltigen Fundus an Beispielen zu den Termingeschäften bereit.

[5] Eine einfache mathematische praktische Hinwendung zum Thema der bedingten und unbedingten Termingeschäfte findet sich in [Tie02] auf S.351-393.

des Basiswertes $S(t)$ zum Zeitpunkt t. Dieses Aktienkursmodell wird über eine stochastische Differentialgleichung beschrieben. Eine stochastische Differentialgleichung selbst wird über das Itô-Integral erklärt und von einem Wiener-Prozess angetriebenen. Der Wiener-Prozess ist ein stochastischer Prozess. Über das Aktienkursmodell gelangt man nach bestimmten Modellannahmen und geeigneten Umformungsschritten auf die Black-Scholes-Gleichung[6]. Da die numerischen Gesichtspunkte der Black-Scholes-Gleichung im Vordergrund stehen, wird nachfolgend nur kurz und sehr elementar auf die Stochastik eingegangen werden, um der obigen Gleichung (1.1) einen Sinn zu geben[7].

DEFINITION 1.1 (Wahrscheinlichkeitsraum)**.** *Ein Wahrscheinlichkeitsraum ist ein Tripel* $[\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P}]$ *bestehend aus dem Raum der Elementarereignisse* $\Omega \neq \emptyset$*, einer* $\sigma-$*Algebra* $\mathfrak{A}$ *über* Ω *und einem Wahrscheinlichkeitsmaß* $\mathbb{P}$ *auf* $\mathfrak{A}$[8]*.*

DEFINITION 1.2 (Zufallsgröße, Verteilung)**.** *Sei* $[\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P}]$ *ein Wahrscheinlichkeitsraum. Eine Abbildung* $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ *heißt* $d-$*dimensionale Zufallsgröße, falls für jedes* $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$ *gilt:*

$$\{X \in B\} := \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} := X^{-1}(B) \in \mathfrak{A}$$

Die Verteilung $\mathbb{P}_X$ *einer* $d-$*dimensionalen Zufallsgröße ist wie folgt definiert:*

$$\mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}\Big(\{X \in B\}\Big), \ \Big(B \ \in \ \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)\Big)$$

Bemerkung 1.1. *Im Fall* $d = 1$ *spricht man von einer Zufallsgröße.*

Beispiel 1.1 (für Zufallsgröße und Verteilung)**.** Wir betrachten einen $d-$dimensionalen Vektor $X = (X_1, \dots, X_d)$ von Zufallsgrößen $X_1, \dots, X_d$ über $[\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P}]$. Weiterhin seien $\mu \in \mathbb{R}^d$ und Cov eine symmetrische, positiv definite $(d \times d)-$Matrix. Dann heißt X $\mathcal{N}_{\mu,Cov}$-verteilt $\Big(\mathbb{P}_X = \mathcal{N}_{\mu,Cov}\Big)$, wenn $\mathbb{P}_X$ die Dichtefunktion

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d det(Cov)}} \, exp\Big(-\frac{1}{2}(x-\mu)^T Cov^{-1}(x-\mu)\Big) \ x \in \mathbb{R}^d,$$

bzgl. des $d-$dimensionalen Lebesque-Maßes besitzt. Hat X solch eine Verteilung, so gilt für den Erwartungswertvektor von X

$$\mathbb{E}X = (\mathbb{E}X_1, \dots, \mathbb{E}X_d) = \mu$$

und für die Kovarianz-Matrix von X

$$Cov(X) = Cov,$$

wobei

$$Cov(X) := \Big(cov(X_i, X_j)\Big)_{i,j=1}^{d} \text{ mit } cov(X_i, X_j) := \mathbb{E}[(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)] \quad \forall\, i, j = 1, \dots, d.$$

---

[6] Ausführlich wird auf technische Begriffe der stochastischen Differentialgleichung in [KaraShr91] S.129-169 eingegangen.

[7] Ein umfassender Überblick über die mathematische Theorie stochastischer Finanzmarktprozesse kann [Haus02] S.346-418 oder [Irle98] entnommen werden.

[8] Die Definitionen der $\sigma-$Algebra über Ω und des Wahrscheinlichkeitsmaßes $\mathbb{P}$ auf $\mathfrak{A}$ sind [Bau90] zu entnehmen.

Man sagt dann auch X ist normalverteilt mit Erwartungswert(vektor) μ und Kovarianz(matrix) Cov. Die Definition der Korrelation lautet

$$\varrho_{i,j} = corr(X_i, X_j) := \frac{cov(X_i, X_j)}{\sqrt{\mathbb{V}ar[X_i]\ \mathbb{V}ar[X_j]}}.$$

Kompakt lautet die Korrelationsmatrix $Corr(X) = Corr$ aufgeschrieben

$$Corr(X) := \Big(corr(X_i, X_j)\Big)_{i,j=1}^{d}.$$

Zwischen Kovarianz- und Korrelations-Matrix besteht der folgende Zusammenhang

$$Corr(X) = \Lambda^{-\frac{1}{2}} Cov(X) \Lambda^{-\frac{1}{2}},$$

wobei Λ die Diagonalmatrix mit den Eigenwerten der Kovarianz-Matrix von X ist. Die Korrelationsmatrix wird in Abschnitt 3.4 ihre entsprechende Verwendung finden.

DEFINITION 1.3 (Stochastische Prozesse)**.** *Ein (stetiger) stochastischer Prozess $X(t)$, $t \in [0, \infty)$, ist eine Familie von Zufallsvariablen $X : \Omega \times [0, \infty)$, wobei $t \mapsto X(\omega, t)$ stetig ist für alle $\omega \in \Omega$. Wir schreiben $X(t) = X(\cdot, t)$, d.h. $X(t)$ ist eine Zufallsvariable.[9].*

DEFINITION 1.4 (Wiener-Prozess)**.** *Es gibt einen stetigen stochastischen Prozess $W(t)$ mit den Eigenschaften:*

(1) Der Wiener-Prozess startet in $t = 0$ in 0, d.h. $W(0) = 0$ mit $\mathbb{P}-$fast sicher, d.h. $\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : W(\omega, 0) = 0\} = 1)$.

(2) Für $s, t \geq 0$ sind die Zuwächse $W(s+t) - W(s)$ normalverteilt mit Erwartungswert 0 und Varianz t.

(3) Für jedes Paar disjunkter Zeitintervalle $(t_1, t_2]$, $(t_3, t_4]$ mit $0 \leq t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$ sind Zuwächse $W(t_4) - W(t_3)$, $W(t_2) - W(t_1)$ (vollständig) stochastisch unabhängig. Entsprechendes soll für $d-$disjunkte Zeitintervalle $d > 2$ gelten.

Bemerkung 1.2. Der zufällige Zustand eines Teilchens des Wiener-Prozesses werde mit $W(.)$ bezeichnet. Wir betrachten den in $x \in \mathbb{R}$ startenden Wiener-Prozess $W^x = \Big(W^x(t)\Big)_{t \geq 0}$ mit $W^x(t) = W(t) + x,\ (t \geq 0)$. Dann besitzt die Zufallsgröße $W^x(t)$ die Dichte

$$u(t, x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp -\frac{1}{2t} \frac{(y-x)^2}{2t}$$

bzgl. des Lebesque-Maßes in $\mathbb{R}$. Einstein hatte gezeigt, dass die angegebene Dichte die Wärmeleitungsgleichung[10] $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$ erfüllt. Das ist eine spezielle Diffusionsgleichung der mathematischen Physik mit dem Diffusionskoeffizienten 1. Die später hinzutretende Black-Scholes-Gleichung lässt sich ebenfalls auf eine parabolische Gleichung zurückführen. Für eine realistische Modellierung der treibenden Marktprozesse für Optionspreisgeschäfte ist in letzter Zeit die Verallgemeinerung der Wiener-Prozesse durch die Levy-Prozesse vorgeschlagen worden. Damit steigt der Schwierigkeitsgrad der Optionsbetrachtung an. Die Modellierung wird genauer, aber die praktische Verwendbarkeit geht zurück, weil die Implementierung sich als sehr schwerfällig erweist. Gerade durch die einfache Implementierung der Black-Scholes-Gleichung stieg die Bedeutung der Optionsgeschäfte.

[9]Die Definition entstammt in etwa den Vorgaben aus [GünJüng03] S.28.

[10]engl. Headequation (HE)

Nachfolgend soll kurz das Itô-Integral eingeführt werden. Da die Einführung dieses Integrals mit allerlei technischen Hilfsmitteln verbunden ist, sei auf die Fachliteratur [Oks98] und [KaraShr91] verwiesen.

DEFINITION 1.5 (Itô-Integral). *Das Itô-Integral mit dem Integrator* $W = \Big(W(t)\Big)_{t\geq 0}$ *ist gegeben durch*

$$\int_0^t X(s)dW(s) := \lim_{d\to\infty} \sum_{k=0}^{d-1} X(t_k)(W(t_{k+1}) - W(t_k)),$$

wobei $X = \Big(X(t)\Big)_{t\geq 0}$ *ein (links-) stetiger stochastischer Prozess sei und* $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_d = t$ *eine Partition von* $[0,t]$ *mit* $\max\{|t_{j+1} - t_j| : j = 0, \ldots, d-1\} \to 0$ *für* $d \to \infty$ *sei.*

DEFINITION 1.6 (Stochastische Differentialgleichung). *Eine stochastische Differentialgleichung ist gegeben durch*

$$dX(t) = a(X(t),t)dt + b(X(t),t)dW(t),$$

wobei $X = \Big(X(t)\Big)_{t\geq 0}$ *ein stochastischer Prozess,* $W = \Big(W(t)\Big)_{t\geq 0}$ *der Wiener-Prozess und* $a, b : \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ *geeignete (d.h. hinreichend reguläre) Funktionen seien. Die stochastische Differentialgleichung ist die symbolische Schreibweise für die Integralgleichung*

$$X(t) = X(0) + \int_0^t a(X(s),s)ds + \int_0^t b(X(s),s)dW(s).$$

LEMMA 1.1 (Lemma von Itô). *Der Prozess* $X = \Big(X(t)\Big)_{t\geq 0}$ *erfülle obige stochastische Differentialgleichung. Sei* $f \in C^2(\mathbb{R} \times [0,\infty))$*, dann gilt für den Prozess* $f(X(t),t))_{t\geq 0}$

$$\begin{aligned} df(X(t),t) =& \Big(\frac{\partial f(X(t),t)}{\partial t} + a(X(t),t)\frac{\partial f(X(t),t)}{\partial x}\Big|_{(X(t),t)} + \frac{1}{2}b^2\frac{\partial^2 f(X(t),t)}{\partial x^2}\Big|_{(X(t),t)}\Big)dt \\ &+ b(X(t),t)\frac{\partial f(X(t),t)}{\partial x}\Big|_{(X(t),t)}dW(t). \end{aligned}$$

Bemerkung 1.3. Der Beweis des Lemmas 1.1 findet sich in [KaraShr91] S.149-152.

Eine Verallgemeinerung des Aktienkursmodells auf $(d-1)$-Basiswerte führt auf die multivariate Black-Scholes-Gleichung. Dafür genügen die probabilistischen Kurse der Basiswerte $S_j(t)$ $\forall\ 1 \leq j \leq d-1$ mit $d \in \mathbb{N}$ den stochastischen Differentialgleichungen

$$dS_j(t) = \mu_j(t)S_j(t)dt + \sigma_j(t)S_j dW_j(t)\ \forall\ 1 \leq j \leq d-1,$$

wobei μ_j, σ_j $\forall\ 1 \leq j \leq d-1$ feste Parameter seien. Hierbei ist

$$\Big(B(t)\Big)_{t\geq 0} = \Big((B_1(t), \ldots, B_{d-1}(t))\Big)_{t\geq 0}$$

ein $(d-1)-$dimensionaler Wiener-Prozess, d.h. jedes $\Big(B_j(t)\Big)_{t\geq 0}$ ist ein eindimensionaler Wiener-Prozess. Für jedes $t \geq 0$ seien die Zufallsgrößen $B_1(t), \ldots, B_{d-1}(t)$ unabhängig, d.h. es gilt

$$\mathbb{P}_{B_1(t),\ldots,B_{d-1}(t)}(A_1 \times \ldots \times A_{d-1}) = \mathbb{P}_{B_1(t)}(A_1) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}_{B_{d-1}(t)}(A_{d-1})$$

mit $A_j \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}),\ t \geq 0, 1 \leq j \leq d-1$. Der $(d-1)-$dimensionale Vektor $B(t) - B(s),\ \forall\, t > s$ ist insbesondere normalverteilt[11] mit Erwartungswertvektor $0 \in \mathbb{R}^{d-1}$ und Kovarianzmatrix $(t-s)I$ mit der Einheitsmatrix $I \in \mathbb{R}^{(d-1)\times(d-1)}$.

Für die Herleitung der multivariaten Black-Scholes-Gleichung für europäische Optionen benötigen wir die Verallgemeinerung des Lemmas von Itô 1.1. Betrachten wir dafür die Abbildung $f:\ \mathbb{R}^{d-1} \times [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ einer $(d-1)$-fach stetig differenzierbaren Funktion. Der neue Prozess $f(X,t)_{t\geq 0}$ mit dem Prozess $X = \Big(X(t)\Big)_{t\geq 0} = \Big(X_1(t),\ldots,X_{d-1}(t)\Big)_{t\geq 0}$ und den Korrelationskoeffizienten $\varrho_{i,j}$ mit dem festen Parameter für den statistischen Zusammenhang zwischen $i-$tem und $j-$tem Asset $\forall\ i \neq j \in \{1,\ldots,d-1\}$ genügt nach der Verallgemeinerung des Lemmas von Itô 1.1 folgender Gleichung

$$
\begin{aligned}
df(X(t),t) =& \Big(\frac{\partial f(X(t),t)}{\partial t} + \sum_{i=1}^{d-1} \mu_i X_i(t) \frac{\partial f(X(t),t)}{\partial x_i}\Big|_{(X_i(t),t)} \\
&+ \sum_{i,j=1}^{d-1} \varrho_{i,j} X_i(t) X_j(t) \sigma_i \sigma_j \frac{\partial^2 f(X(t),t)}{\partial X_i(t) \partial X_j(t)}\Big|_{(X_i(t),t),(X_j(t),t)}\Big) dt \\
&+ \sum_{i=1}^{d-1} \sigma_i X_i(t) \frac{\partial f(X(t),t)}{\partial x_i}\Big|_{(X_i(t),t)} dB_i(t).
\end{aligned}
$$

Bemerkung 1.4. *Der Beweis für den allgemeinen $(d-1)-$dimensionalen Fall des Lemmas von Itô befindet sich in [KaraShr91] S.153.*

1.3.3 Grundlagen der Numerik

Numerik partieller Differentialgleichungen mit Finiten Differenzen

DEFINITION 1.7 (Partielle Differentialgleichung). *Eine partielle Differentialgleichung[12], ist eine Gleichung (oder ein Differentialgleichungssystem) für eine oder mehrere unbekannte Funktionen, die folgende Kriterien erfüllt:*

1. *Die unbekannte Funktion hängt von mindestens 2 Variablen ab[13].*
2. *In der PDE kommen partielle Ableitungen nach mindestens 2 Variablen vor.*
3. *In der Gleichung kommen nur die Funktion sowie deren partielle Ableitungen, jeweils am gleichen Punkt ausgewertet, vor.*

Für unsere Belange reicht die Betrachtung von linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. In ihrer allgemeinsten Form hat diese PDE zweiter Ordnung mit $d-$Variablen mit der Indexabkürzung $u_{x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}\ \forall\, 1 \leq i \leq d$ folgende Gestalt:

$$
L(u)(x_1,\ldots,x_d) := -\sum_{i,j=1}^{d} a_{i,j} u_{x_i x_j} + \sum_{j=1}^{d} b_j u_{x_j} + cu = f, \tag{1.2}
$$

wobei $L(u)(x_1,\ldots,x_d)$ der lineare Differentialoperator mit den Koeffizienten $a_{i,j},\ b_j,\ c$ $\forall\ 1 \leq i,j \leq d$ sei. Die Funktion $f:\ \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ ist vorgegeben und die Funktion u ist die

[11] Motivation, um später im Kapitel 3 die Basket-Optionen einführen zu können.
[12] Abkürzung PDE für eng. partial differential equation
[13] Wenn sie nur von einer Variable abhängt, bezeichnet man sie als gewöhnliche Differentialgleichung.

gesuchte Lösungsfunktion.

Im Hinblick auf die später verwendete Black-Scholes-Gleichung interessieren wir uns für parabolische Gleichungen in den zwei Variablen x, t folgender Gestalt:

$$-a_{11}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - a_{12}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x\,\partial t} - a_{13}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + b_1\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + b_2\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + cu(x,t) = f$$

Mit $a_{11} = a_{12} = b_2 = c = f = 0$, $a_{13} = -1$, $b_1 = 1$ ist das die originäre Wärmeleitungsgleichung $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$. Wenn $u \in C^2$ ist, gilt $u_{x_i x_j} = u_{x_j x_i}$, wobei die Matrix $A := (a_{i,j})_{i,j=1,\dots,d} \in \mathbb{R}^{d\times d}$ symmetrisch ist. Wir bezeichnen (1.2) als parabolisch, wenn für die Form $\frac{\partial u}{\partial t} - Lu = 0$ der kontinuierliche Differentialoperator L in seiner Matrixgestalt positiv definit ist. Es wird sich zeigen, dass sich die Black-Scholes-Gleichung auf die Wärmeleitungsgleichung reduzieren lässt.

Für die parabolische Wärmeleitungsgleichung existiert eine analytisch herleitbare Lösungsformel. Viele partielle Differentialgleichungen besitzen aber keine geschlossene Lösungsformel. Aus diesem Grund werden numerische Verfahren eingesetzt, um auch für diese partiellen Differentialgleichungen Lösungsfunktionen zu finden. Zur numerischen Behandlung von partiellen Differentialgleichungen wird in dieser Diplomarbeit die Finite Differenzen-Methode herangezogen. Darüber hinaus existieren weitere wesentlich leistungsfähigere numerische Methoden zum Lösen von partiellen Differentialgleichungen, so z.B. Finite Elemente für elliptische partielle Differentialgleichungen oder die Finite Volumen-Methode für hyperbolische partielle Differentialgleichungen.

Die Vorgehensweise zur numerischen Behandlung einer partiellen Differentialgleichung mittels Finiter Differenzen ist verhältnismäßig einfach. Die Differentialquotienten werden durch Differenzenquotienten approximiert. Das zulässige kontinuierliche Gebiet wird in ein feines Gitter zerlegt. Die unbekannten Lösungswerte an jedem Gitterkreuzungspunkt können zu einem Lösungsvektor zusammengefasst werden. Aus der Diskretisierung resultiert die Aufstellung eines linearen Gleichungssystems. Der unbekannte Lösungsvektor des resultierenden Gleichungssystems wird mittels eines direkten robusten oder iterativen Lösers ermittelt. Bei zunehmender Feinheit des Gitters konvergiert die Finite Differenzen-Lösung gegen die exakte Lösung.

Iteratives Lösen großer linearer Gleichungssysteme

"Bei der Diskretisierung partieller Differentialgleichungen werden dem Ausgangsproblem zur Ermittlung einer entsprechenden Lösungsfunktion lineare Gleichungssysteme für die jeweiligen Diskretisierungsbereiche zugeordnet. Das Kernproblem stellt das Lösen dieser linearen Gleichungssysteme dar. Diese Gleichungssysteme besitzen folgende spezifische Eigenschaften: eine sehr große Dimension, eine schwach besetzte Koeffizientenmatrix und eine schlechte Kondition."[14] Aus diesem Grunde sind Standardlöser, wie z.B. die Gauß-Jordan-Elimination oder die Cholesky-Zerlegung, nicht effektiv bzw. wegen der Speicherplatz- und Rechenzeitbeschränkungen nicht anwendbar. Zum Lösen dieses Gleichungssystems bietet es sich an, einen iterativen Löser einzusetzen. Die gängigsten iterativen Löser sind das SOR- oder das CG-Verfahren[15]. Beide Verfahren sind nur dann konvergent, wenn die zusammengefasste diskrete Operatormatrix symmetrisch und positiv-definit ist. Sollte dies nicht der Fall

[14] Entnommen von [GroRoos94] S. 246.

[15] Zu den Iterationsverfahren sei auf [Hack93] verwiesen mit S.22-25 für SOR- und S.236-277 für das CG-Verfahren.

sein, gibt es weitere Verfahren, deren Implementierung sehr schwierig ist, aber sich in vielen Programmpaketen als integrierte Softwarelösung wiederfinden lässt. In dieser Diplomarbeit wird bei den amerikanischen Optionen eine Erweiterung des iterativen SOR-Verfahrens eingesetzt, das sogenannte Projektions-SOR-Verfahren. Das resultierende Gleichungssystem der Basket-Option aus der Diskretisierung mittels der Finiten Differenzen lässt sich u.a. mit dem GMRES- oder BCG-Iterationsverfahren[16] lösen.

Formal aufgeschrieben ist ein Iterationsverfahren die Konstruktion einer Folge $\{x^{(i)}\}_{i=0}^{\infty}$ mit

$$\lim_{i\to\infty}\{x^{(i)}\}_{i=0}^{\infty} = x = A^{-1}b.$$

Dabei sei A eine konvergente Matrix, d.h. es gilt

$$\lim_{k\to\infty}\left(A^k\right)_{i,j} = 0 \;\forall\; i,j = 1,\ldots,d \text{ mit } d \in \mathbb{N}.$$

Diese Aussage ist äquivalent zu $A^k x \to 0 \;\forall\; z \in \mathbb{R}^d$. Das lineare Gleichungssystem sei $Ax = b$ mit der Abmachung $det(A) \neq 0$, d.h. die Inverse von A existiert. Der Startvektor des Iterationsverfahrens ist $x^{(0)} \in \mathbb{R}^d$. Eine gleichwertige Aussage für die Konvergenz kann über den Spektralradius ϱ angegeben werden

$$\varrho(A) = \max_{1\le k\le d} |\mu_k^A| < 1,$$

wobei $\mu_1^A,\ldots,\mu_n^A$ die Eigenwerte von A sind. Diese Aussage wird benötigt, um die Dämpfung des Iterationsverfahrens sicherzustellen, damit über die einzelnen Iterationsschritte das Verfahren gegen die exakte Lösung des linearen Gleichungssystems strebt.

[16] Siehe [Hack93]

2 Numerische Behandlung von europäischen und amerikanischen Optionen

2.1 Abgrenzung beider Optionstypen

Das Aktienkursmodell beruht auf einer stochastischen Differentialgleichung. Nach geeigneten Umformungsschritten und Annahmen erhält man die Black-Scholes-Gleichung. Darauf aufbauend können die europäischen Optionen numerisch bewertet werden. An sich muss die Bewertung der europäischen Option numerisch nicht berechnet werden, weil dafür eine analytisch geschlossene Lösungsformel existiert. Die europäischen Optionen dienen viel mehr als Einstieg in das Verständnis der numerischen Behandlung von Optionspreisaufgaben. Im Gegensatz zu europäischen Optionen räumen amerikanische Optionen das Recht ein, zu einem beliebigen Zeitpunkt innerhalb der Laufzeit die Option auszuüben. Aufgrund des zusätzlichen Rechts der vorzeitigen Ausübung ist eine amerikanische Option im Allgemeinen teurer als eine europäische. Der amerikanische Optionspreis kann also nicht über die Black-Scholes-Gleichung bestimmt werden. Vielmehr muss der Optionspreis über eine Ungleichung ermittelt werden. Diese Ungleichung hängt mit dem sogenannten "Hindernisproblem" zusammen. Die Lösung der Ungleichung kann im Allgemeinen nur numerisch ermittelt werden.

Durch Transformation wird die Black-Scholes-Gleichung in eine Wärmeleitungsgleichung umformuliert. Mittels Approximation durch Finite Differenzen kann die Lösungsfunktion der Wärmeleitungsgleichung numerisch bestimmt werden. Im Anschluss wird die Lösungsfunktion der Wärmeleitungsgleichung auf die Lösungsfunktion der Black-Scholes-Gleichung retransformiert. Bei der amerikanischen Option wird das Projektions-SOR als Iterationsverfahren angewendet, um den fairen Preis einer amerikanischen Option berechnen zu können.

In diesem Kapitel wurde hauptsächlich mit den Quellen [Sey00], [GünJüng03] und [Sey04] gearbeitet.

2.2 Das eindimensionale Black-Scholes-Modell

Die Modellannahmen geben den Rahmen vor, in dem die Black-Scholes-Gleichung ihre Gültigkeit besitzt. Das einfache zeitdiskrete Modell mit einer zugrunde liegenden Binomialverteilung wird in [CRR79] vorgestellt. Das nun folgende zeitstetige Modell entstammt [BS73]. Folgende Modellvoraussetzungen sind von [GünJüng03] S.52 entnommen worden, um die Black-Scholes-Gleichung herleiten zu können:

- Der vorherrschende Kapitalmarkt ist arbitragefrei, liquide und friktionslos[1].
- Der Aktienkurs $S = \Big(S(t)\Big)_{t\geq 0}$ des Underlyings genüge einer stochastischen Differentialgleichung

$$dS(t) = (\mu - \delta)S(t)dt + \sigma S(t)dW(t) \tag{2.1}$$

[1] Es fallen keine Gebühren, Steuern oder sonstige Transaktionskosten an.

mit konstanten Parametern $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$. Wir setzen voraus, dass die Höhe der Dividende $0 \leq \delta \leq r$ vom Kurs des Basiswertes abhängt und zu ihm proportional ist. Dabei sind stetige Dividendenzahlungen vom Basiswert zugelassen[2].

- Auf einem vollkommenen Kapitalmarkt wird für eine Geldanlage und eine Kreditaufnahme derselbe gegebene risikolose Zinssatz $r \geq 0$ angesetzt. Der entsprechende Bond sei $|A(t)| > 0$, wobei $A(t) > 0$ für den Geldanlagenstrom und $A(t) < 0$ für den Kreditaufnahmestrom stehe. Für die Anlage gelte folgende Gleichung:

$$dA(t) = rA(t)dt \tag{2.2}$$

- Das Underlying kann kontinuierlich gehandelt werden und ist beliebig teilbar. Außerdem sind Leerverkäufe[3] in diesem Modellkontext zulässig.

- Alle betrachteten stochastischen Prozesse sind stetig. Somit kann kein Börsencrash modelliert werden.

Mit $Y = \Big(Y(t)\Big)_{t\geq 0}$ sei der stochastische Prozess eines Portefeuilles beschrieben. Das Portefeuille $Y(t)$ zum Zeitpunkt t bestehene aus $c_1(t)$ Anteilen eines Bonds $A(t)$, $(c_2(t) + \delta)$ Anteilen des Basiswertes $S(t)$ und dem Wert einer verkauften Option $V(S(t), t)$

$$Y(t) = c_1(t)A(t) + (c_2(t) + \delta)S(t) - V(S(t), t).$$

Das Portefeuille $Y(t)$ zum Zeitpunkt t sei selbstfinanzierend, d.h. der Ertrag aus dem Verkauf der Option wird so in Aktien und risikolosen Bonds investiert, unter ständiger Umschichtung, aber ohne weiteren Zufluss von Mitteln, dass am Ende die verlangte Auszahlung bestritten werden kann. Unser Portefeuille $Y(t)$ erfülle die beiden folgenden Voraussetzungen:

1. Das Portefeuille $Y(t)$ ist risikolos, d.h. es unterliegt keinen zufälligen Schwankungen. Aufgrund der Arbitrage-Freiheit kann ein risikoloses Portefeuille nur soviel erwirtschaften wie eine risikolose Anlage. Die Portefeuilleänderung lautet daher

$$dY(t) = rY(t)dt. \tag{2.3}$$

2. Wir behaupten, dass für die Änderung eines selbstfinanzierenden Portefeuilles die stochastische Differentialgleichung

$$dY(t) = c_1(t)dA(t) + c_2(t)dS(t) - dV(S(t), t) + c_2(t)\delta S(t)dt \tag{2.4}$$

folgt. Der Investor hält $c_2(t)$ Anteile am Basiswert. Wird für den Basiswert in Form einer Aktie eine Dividende ausgeschüttet, dann fließt dem Investor eine Dividende in Höhe von $c_2(t)\delta S(t)dt$ in der Zeit dt zu.

Nach dem Lemma von Itô 1.1 erfüllt V die stochastische Differentialgleichung

$$\begin{aligned} dV(S(t), t) =& \frac{\partial V(S(t), t)}{\partial t} + \mu S(t)\frac{\partial V(S(t), t)}{\partial s}\Big|_{(S(t),t)} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2(t)\frac{\partial^2 V(S(t), t)}{\partial s^2}\Big|_{(S(t),t)} \\ &+ \sigma S(t)\frac{\partial V(S(t), t)}{\partial s}\Big|_{(S(t),t)} dW(t). \end{aligned} \tag{2.5}$$

[2] Der Begriff der stochastischen Differentialgleichung wird im Kapital 1.3.2 Definition 1.6 spezifiziert.

[3] Underlying wird ausgeliehen und verkauft und später zurückgekauft.

Setzen wir die stochastischen Differentialgleichungen aus dem Aktienkursmodell (2.1), der Anlagengleichung (2.2) und der durch $V(S(t),t)$ erfüllten Gleichung (2.5) für $S(t)$, $A(t)$ bzw. $V(S(t),t)$ in (2.4) ein, erhalten wir

$$\begin{aligned} dY(t) =& \Big[c_1(t)rA(t) + c_2(t)(\mu-\delta)S(t) - \Big(\frac{\partial V(S(t),t)}{\partial t} \\ &+ (\mu-\delta)S(t)\frac{\partial V(S(t),t)}{\partial s}\Big|_{(S(t),t)} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2(t)\frac{\partial^2 V(S(t),t)}{\partial s^2}\Big|_{(S(t),t)}\Big) + c_2(t)\delta S(t)\Big]dt \\ &+ \Big(c_2(t)\sigma S(t) - \sigma S(t)\frac{\partial V(S(t),t)}{\partial s}\Big|_{(S(t),t)}\Big)dW(t) \\ =& \Big[c_1(t)rA(t) + \delta S(t)\frac{\partial V(S(t),t)}{\partial s}\Big|_{(S(t),t)} - \frac{\partial V(S(t),t)}{\partial t} - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2(t)\frac{\partial^2 V(S(t),t)}{\partial s^2}\Big|_{(S(t),t)}\Big]dt. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Die Annahme eines Portefeuilles ohne zufällige Schwankungen (2.3) führt auf das Verschwinden des Koeffizienten vor dW, d.h.

$$c_2(t) = \frac{\partial V(S(t),t))}{\partial s}\Big|_{(S(t),t)}.$$

Aus Arbitrage-Gründen gilt

$$dY(t) = rY(t)dt = r\Big(c_1(t)A(t) + S(t)\frac{\partial V(S(t),t)}{\partial s}\Big|_{(S(t),t)} - V(S(t),t)\Big)dt. \tag{2.7}$$

Durch Gleichsetzen der beiden Gleichungen (2.6) und (2.7) und Identifikation der Koeffizienten der dt Terme ergibt sich die modifizierte Black-Scholes-Gleichung mit $S(t) > 0$, $0 < t < T$

$$\frac{\partial V(S(t),t)}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2(t)\frac{\partial^2 V(S(t),t)}{\partial s^2}\Big|_{(S(t),t)} + rS(t)\frac{\partial V(S(t),t)}{\partial s}\Big|_{(S(t),t)} - rV(S(t),t) = 0. \tag{2.8}$$

Die Endbedingung bzw. Auszahlungsfunktion $\Lambda : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ für dieses Problem lautet $V(S(T),T) = \Lambda(S),\ S(T) > 0$. Die Lösung $V = V(S,t)$ für die eben aufgestellte modifizierte Black-Scholes-Gleichung wird über die folgenden beiden Sätze angegeben:

SATZ 2.1 (Black-Scholes-Formel für die europäische Call-Option)**.** *Die Black-Scholes-Gleichung (2.8) mit den Randbedingungen* $V(0,t) = 0$, $\lim\limits_{S\to\infty}\Big(V(S,t) - S\Big) = 0$ *und der Endbedingung* $V(S,T) = \Lambda(S),\ S \in [0,\infty)$*, wobei für die Auszahlungsfunktion* $\Lambda(S) = (S-K)^+$ *gilt, besitzt die Lösung*

$$V(S,t) = \Phi_{0,1}(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\Phi_{0,1}(d_2),\ S > 0,\ 0 \leqslant t < T, \tag{2.9}$$

mit der Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung

$$\Phi_{0,1}(d_{1,2}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{d_{1,2}} e^{-\frac{s^2}{2}}ds, \quad d_{1,2} \in \mathbb{R} \quad \textit{und} \quad d_{1,2} = \frac{\ln\frac{S}{K} + (r - \delta \pm \frac{\sigma^2}{2}(T-t))}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

wobei mit $0 \leq \delta \leq r$ *der Dividendenfall berücksichtigt wird.*

Bemerkung 2.1. Der Beweis des Satzes findet sich in [GünJüng03] S.56-60.

Die geschlossene Lösungsformel europäischer Optionen kann durch Einsetzen nachgewiesen oder über die Differentialgleichung hergeleitet werden. Für den letzten Weg benötigt man eine geeignete bijektive Koordinatentransformation, um die Black-Scholes-Gleichung in eine Wärmeleitungsgleichung umzuformulieren. In Abschnitt 2.3 sind die benötigten Transformationsschritte aufgelistet.

SATZ 2.2 (Black Scholes Formel für die europäische Put-Option)**.** *Die Black-Scholes-Gleichung (2.8) mit den Randbedingungen* $V(0,t) = Ke^{-r(T-t)}$, $\lim_{S\to\infty} V(S,t) = 0$ *und der Endbedingung* $V(S,T) = \Lambda(S),\ S \in [0,\infty)$, *wobei für die Auszahlungsfunktion* $\Lambda(S) = (K-S)^+\ \forall\ S > 0$ *gilt, besitzt die Lösung*

$$V(S,t) = Ke^{-r(T-t)}\Phi_{0,1}(-d_2) - S\Phi_{0,1}(-d_1),\ S > 0,\ 0 \le t < T, \tag{2.10}$$

mit der Verteilungsfunktion $\Phi_{0,1}(\cdot)$ *und den bekannten* $d_{1,2}$ *aus Satz 2.1, wobei mit* $0 \le \delta < r$ *der Dividendenfall berücksichtigt wird.*

Bemerkung 2.2. Der Satz 2.2 kann über den Satz 2.1 mit der "Put-Call-Parität"

$$V_C(S,t) + K\ e^{-(T-t)r} = V_P(S,t) + S(t) \quad (\forall\ 0 \le t \le T) \quad \text{hergeleitet werden,}$$

wobei $V_C(S,t)$ für den "Fair Value" der Call-Option und $V_P(S,t)$ für den „Fair-Value" der Put-Option steht.

Bemerkung 2.3. Die Endbedingungen der europäischen Call-Option $\Lambda_C(S) = (S-K)^+$ und der europäischen Put-Option $\Lambda_P(S) = (K-S)^+$ besitzen an der Stelle $S = K$ einen "Knick", d.h. an dieser Stelle ist die Funktion stetig, aber nicht differenzierbar. Für die spätere Approximation der Differentialoperatoren erweist sich diese Randsingularität als Auslöser einer größeren Fehlerquelle.

2.3 Transformation auf die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung

Folgende Transformationsschritte müssen vorgenommen werden, um aus der modifizierten Black-Scholes-Gleichung (2.8), die nur noch von den Variablen S und t abhängt, die Wärmeleitungsgleichung zu erhalten[4]. Zuerst eliminieren wir die nichtkonstanten Koeffizienten S und S^2 vor den Termen $\frac{\partial V(S,t)}{\partial S}$ und $\frac{\partial^2 V(S,t)}{\partial S^2}$ durch eine geeignete Variablentransformation. Dabei setzen wir

$$x = ln\Big(\frac{S}{K}\Big), \quad \tau = \frac{\sigma^2(T-t)}{2}, \quad v(x,\tau) = \frac{V(S,t)}{K}. \tag{2.11}$$

Aus dem zulässigen Bereich $S > 0,\ 0 \le t \le T$ und $V(S,t) \ge 0$ folgt dann der transformierte Bereich

$$x \in \mathbb{R},\ 0 \le \tau \le T_0 := \frac{T\sigma^2}{2} \text{ und } v(x,\tau) \ge 0.$$

Es ist üblich, die partiellen Ableitungen als Indizes zu schreiben, d.h. als $V_S = \frac{\partial V(S,t)}{\partial S}$. Mit der Kettenregel gilt dann

$$\begin{aligned}
V_t &= Kv_\tau\tau_t = -\frac{\sigma^2}{2}K\frac{\partial\tau}{\partial t},\\
V_S &= Kv_x\frac{dx}{dS} = \frac{K}{S}v_x, V_{SS} = \frac{\partial}{\partial S}\Big(\frac{K}{S}v_x\Big) = -\frac{K}{S^2}v_x + \frac{K}{S}v_{xx}\frac{1}{S} = \frac{K}{S^2}(-v_x + v_{xx}).
\end{aligned}$$

Es ergibt sich durch Einsetzen in die Gleichung (2.8)

$$\Big(-\frac{\sigma^2}{2}Kv_\tau + \frac{\sigma^2}{2}K(-v_x + v_{xx}) + Kv_x(r-\delta) - rKv\Big) = 0.$$

[4]Die Transformationsschritte sind aus [GünJüng03] S.57 unten entnommen.

Wird auf beiden Seiten durch die Konstanten $\Big(-K\frac{\sigma^2}{2}\Big)$ dividiert, gelangt man auf

$$\Big(v_\tau - (-v_x + v_{xx}) - \frac{2}{\sigma^2}v_x(r-\delta) + \frac{2}{\sigma^2}rv\Big) = 0.$$

Unter Verwendung der Abkürzungen $q = \frac{2}{\sigma^2}r, \quad q_\delta = \frac{2(r-\delta)}{\sigma^2}$ ergibt sich

$$\Big(v_\tau - v_{xx} + v_x(1-q_\delta) + qv\Big) = 0. \tag{2.12}$$

Als nächstes wähle man folgenden Ansatz, um zur Wärmeleitungsgleichung zu gelangen:

$$v(x,\tau) = exp(\alpha x + \beta\tau)u(x,\tau) \text{ mit geeigneten Parametern } \alpha,\ \beta\ \in\ \mathbb{R}$$

Den Ansatz einsetzen in (2.12) und dividieren durch $e^{\alpha x + \beta\tau}$ führt auf

$$\Big(\beta u + u_\tau - \alpha^2 u - 2\alpha u_x - u_{xx} + (1-q_\delta)(\alpha u + u_x) + qu\Big) = 0.$$

Die $u,\ u_{xx}$ Terme können eliminiert werden, wenn α und β so gewählt werden, dass

$$\beta - \alpha^2 + (1-q_\delta)\alpha + q = 0, \quad -2\alpha + (1-q_\delta) = 0.$$

Beide Gleichungen können mit

$$\alpha = -\frac{1}{2}(q_\delta - 1),\ \beta = -\frac{1}{4}(q_\delta-1)^2 - q \text{ gelöst werden.}$$

Das Einsetzen der Ergebnisse liefert die transformierte Funktion u mit

$$u(x,\tau) = exp\Big(-\alpha x - \beta\tau\Big)v(x,\tau) = f(x,\tau)v(x,\tau),$$

wobei die Funktion

$$f(x,\tau) := exp\Big(\frac{1}{2}(q_\delta - 1)x + \frac{1}{4}(q_\delta-1)^2\tau + q\tau\Big) \quad \text{sei,}$$

und löst die Gleichung

$$u_\tau - u_{xx} = 0\ x \in \mathbb{R}, \quad \tau \in (0,T],$$

mit der Anfangsbedingung[5]

$$\begin{aligned}
u(x,0) &= f(x,0),\ x \in \mathbb{R} \quad \text{die Werte von } f \text{ gelten für } u \text{ in } \tau = 0,\\
u(x,0) &= exp\Big((q-1)x\Big)\frac{\Lambda(Ke^x)}{K}\\
&= \begin{cases} exp\Big(\frac{1}{2}(q_\delta-1)x\Big)(1-e^x)^+ = \Big(e^{(q_\delta-1)x/2} - e^{(q+1)x/2}\Big)^+, & \text{Put}\\ exp\Big(\frac{1}{2}(q_\delta-1)x\Big)(e^x-1)^+ = \Big(e^{(q_\delta+1)x/2} - e^{(q-1)x/2}\Big)^+, & \text{Call.}\end{cases}
\end{aligned}$$

Durch Wahl geeigneter Punkte x_{min} und x_{max} werden in $x-$Richtung künstliche Ränder eingeführt und dort die (transformierten) Werte der asymptotischen Randbedingungen aus Satz 2.1 und 2.2 als Randwerte verwendet. Für die Randwerte der Put-Option gilt damit

$$u(x_{min},\tau) = exp\Big(\frac{1}{2}(q_\delta-1)x_{min} + \frac{1}{4}(q_\delta-1)^2\tau\Big), \quad u(x_{max},\tau) = 0 \tag{2.13}$$

und für die Randwerte der Call-Option

$$u(x_{min},\tau) = 0, \quad u(x_{max},\tau) = exp\Big(\frac{1}{2}(q_\delta+1)x_{max} + \frac{1}{4}(q_\delta+1)^2\tau\Big). \tag{2.14}$$

Nachfolgend ist $x_{min} = -a$ und $x_{max} = a$ für hinreichend großes $a > 0$. Damit wird das zulässige Gebiet der (transformierten) Werte auf das Intervall $[-a,a]$ zurechtgeschnitten.

[5] Unter Ausnutzung von [Sey00] S.79.

Bemerkung 2.4. Mit $S := \hat{S} \cdot \Big(\delta(T-t)\Big)$ transformiere man die modifizierte Black-Scholes-Gleichung (2.8) in die dividendenfreie Version. Hieraus erhält man die Dividenden-Version von (2.13) bzw. (2.14). Der Rest folgt mit der Transformation (2.11).

Am Ende erhält man die eindimensionale parabolische Wärmeleitungsgleichung mit dem stetigen Differentialoperator L:

$$L(u)(x,\tau) = u_\tau(x,\tau) - u_{xx}(x,\tau) = 0.$$

2.4 Numerik europäischer Optionen

2.4.1 Aufstellen des resultierenden linearen Gleichungssystems

Die Anfangs- und Randwertbedingungen müssen bei der numerischen Behandlung von partiellen Differentialgleichungen besonders genau betrachtet werden. Jedes wirtschaftswissenschaftliche Problem hat seine eigenen Parameter und damit seine eigenen Anfangs- und Randwertbedingungen. Die Endbedingungen der Black-Scholes-Gleichung entsprechen den Anfangsbedingungen der Wärmeleitungsgleichung. Ausgehend von dieser Endbedingung wird die Evolution der Lösung auf der positiven Achse rückwärts bis $t = 0$ verfolgt. Die Randbedingungen lassen sich über das asymptotische Verhalten des Aktienkurses ermitteln. Mittels des Differenzenkalküls kann der stetige Differentialoperator der numerischen Behandlung zugänglich gemacht werden. Wichtig für die numerische Verwendbarkeit ist die Stabilitäts- und Konsistenzbetrachtung der aufgestellten diskreten Differentialoperatormatrix. Um die Stabilität ohne Restriktionen garantieren zu können, wird das Crank-Nicolson-Verfahren eingesetzt. Darunter versteht man die Mittelung des aktuellen und des vorhergehenden Zeitschrittes. Das allgemeine ϑ-Verfahren wird über den Parameter ϑ mit $\vartheta \in [0,1]$ gesteuert. Es wird unterschieden zwischen dem explizten Euler-Verfahren $\vartheta = 0$, dem Crank-Nicolson-Verfahren $\vartheta = \frac{1}{2}$ und dem impliziten Euler-Verfahren $\vartheta = 1$.

Das Crank-Nicolson-Verfahren verschafft uns für die numerische Behandlung zweierlei Vorteile. Zum einen kann auf Restriktionen bzgl. der Feinsteuerung in Zeitrichtung verzichtet werden, d.h. es kann auf anisotropen Gittern gerechnet werden und zum anderen konvergiert das Verfahren mit quadratischer Ordnung. Letzteres heißt, wenn wir die Gittermaschenweite in Zeit- und in Kursrichtung jeweils halbieren, dann vierteln wir den numerischen Fehler. Ansonsten würde der Differenzenquotient ohne Crank-Nicolson in Zeitrichtung nur einfache Konvergenz zulassen. Auf die Restriktion muss verzichtet werden, da sonst die im letzten Kapitel verwendete *Kombinationstechnik* nicht einsetzbar wäre. In der Nähe der Randsingularität ist ein großer numerischer Fehler zu erwarten. Die später hinzutretende *Kombinationstechnik* funktioniert in der Theorie nur bei glatten Funktionen. Durch empirische Beobachtungen mittels Computerexperimenten kann im 5. Kapitel gezeigt werden, dass auch für die Optionsgeschäfte mit nicht glatten Stellen die *Kombinationstechnik* eingesetzt werden kann. Nähere Erläuterungen finden sich im Abschnitt 4.2 S.40.

Für die kontinuierliche Wärmeleitungsgleichung $L(u)(x,\tau) = u_\tau(x,\tau) - u_{xx}(x,\tau) = 0$ auf dem Gebiet $[-a,a] \times [0,T]$ stelle w die numerische Approximation zu u dar. Die Diskretisierung der Achsen wurde auf folgende Weise festgelegt:

$$\begin{aligned} x_j &= -a + (j-1)\,\Delta x \;\forall\, 1 \leq j \leq n+1, \quad \Delta x = \frac{2a}{n}, \\ \tau_k &= (k-1)\Delta\tau \;\forall\, 1 \leq k \leq m+1, \quad \Delta\tau = \frac{\frac{1}{2}T\sigma^2}{m} \end{aligned} \tag{2.15}$$

Die Gleichung zerfällt in die Differenzenquotienten, wobei $[\partial_\tau]$ als Abkürzung für den Differenzenquotienten gewählt wurde

$$[\partial_\tau w]_{(j)}^{(k)} := \frac{w_j^{(k+1)} - w_j^{(k)}}{\Delta\tau} \quad \text{und} \quad [\partial_{xx} w]_{(j)}^{(k)} := \frac{w_{j+1}^{(k)} - 2w_j^{(k)} + w_{j-1}^{(k)}}{\Delta x^2}.$$

Die Diskretisierung der kontinuierlichen Gleichung erfolgt unter der Verwendung eines allgemeinen $\vartheta-$Verfahrens. Die Gleichung lautet dann in kompakter diskreter Operatorschreibweise:

$$[\partial_\tau w]_{(j)}^{(k)} = (1-\vartheta)[\partial_{xx} w]_{(j)}^{(k)} + \vartheta\, [\partial_{xx} w]_{(j)}^{(k+1)}\ \forall\, 2 \le j \le n,\ 1 \le k \le m,$$

wobei aus Abkürzungszwecken $\lambda := \frac{\Delta\tau}{\Delta x^2}$ gesetzt wird. Dies führt dann auf folgende Gleichungsgestalt:

$$0 = (1-\vartheta)\lambda w_{j+1}^{(k)} - 2(1-\vartheta)\lambda w_j^{(k)} + (1-\vartheta)\lambda w_{j-1}^{(k)} + \vartheta\lambda w_{j+1}^{(k+1)} - 2\lambda\vartheta w_j^{(k+1)} + \vartheta\lambda w_{j-1}^{(k+1)}$$

$\forall\ 2 \le j \le n,\ 1 \le k \le m$. Werden alle Terme zur $(k+1)$-ten Zeitstufe auf die linke Seite und alle Terme zur k-ten Zeitstufe auf die rechte Seite gebracht, führt dies auf folgende Gleichungsgestalt

$$\begin{aligned} &- \vartheta\lambda w_{j-1}^{(k+1)} + (2\vartheta\lambda + 1) w_j^{(k+1)} - \vartheta\lambda w_{j-1}^{(k+1)} \\ &= (1-\vartheta)\lambda w_{j-1}^{(k)} - \Big(2(1-\vartheta)\lambda - 1\Big) w_j^{(k)} + (1-\vartheta)\lambda w_{j+1}^{(k)} \end{aligned}$$

$\forall\ 2 \le j \le n,\ 1 \le k \le m$. Für die Randwertbetrachtung aus (2.13) und (2.14) muss ein hinreichend großes $a \in \mathbb{R}$ gewählt werden, um das asymptotische Verhalten der Optionen bei transformierten Kursen adäquat wiedergeben zu können. Das Gleichungssystem für das innere Gebiet und das Randwertgebiet lautet dann in Matrixschreibweise

$$Aw^{(k+1)} = Bw^{(k)}, \quad A, B \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)},\ w^{(k)} \in \mathbb{R}^{(n+1)}. \tag{2.16}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda\vartheta & 1+2\lambda\vartheta & \lambda\vartheta & \\ \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & \lambda\vartheta & 1+2\lambda\vartheta & \lambda\vartheta \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{w}_1^{(k+1)} \\ w_2^{(k+1)} \\ \vdots \\ w_n^{(k+1)} \\ \tilde{w}_{n+1}^{(k+1)} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda(1-\vartheta) & -(2(1-\vartheta)\lambda - 1) & \lambda(1-\vartheta) & \\ \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & \lambda(1-\vartheta) & -(2(1-\vartheta)\lambda-1) & \lambda(1-\vartheta) \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{w}_1^{(k)} \\ w_2^{(k)} \\ \vdots \\ w_n^{(k)} \\ \tilde{w}_{n+1}^{(k)} \end{pmatrix}$$

Die Randwerte $\tilde{w}_1^{(k)}$ und $\tilde{w}_{n+1}^{(k)}$ sind bekannt und reduzieren somit das Gleichungssystem. In einem Zusatzvektor $g^{(k)}\ \forall\ 1 \le k \le m$ werden die bekannten Randwerte zur $k-$ und $(k+1)-$Zeitstufe vermerkt. Das modifizierte lineare Gleichungssystem lautet dann:

$$\hat{A}\hat{w}^{(k+1)} = \hat{B}\hat{w}^{(k)} + g^{(k)} \quad \hat{A}, \hat{B} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)},\ \hat{w}^{(k)} \in \mathbb{R}^{(n-1)} \tag{2.17}$$

$$\begin{pmatrix} 1+2\lambda\vartheta & -\vartheta\lambda & & & \\ -\vartheta\lambda & 1+2\lambda\vartheta & -\vartheta\lambda & & \\ \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & -\vartheta\lambda & 1+2\lambda\vartheta & -\vartheta\lambda \\ & & -\vartheta\lambda & 1+2\lambda\vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_2^{(k+1)} \\ w_3^{(k+1)} \\ \vdots \\ w_{n-1}^{(k+1)} \\ w_n^{(k+1)} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -(2(1-\vartheta)\lambda-1) & \lambda(1-\vartheta) & & & \\ \lambda(1-\vartheta) & -(2(1-\vartheta)\lambda-1) & \lambda(1-\vartheta) & & \\ \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & \lambda(1-\vartheta) & -(2(1-\vartheta)\lambda-1) & \lambda(1-\vartheta) \\ & & \lambda(1-\vartheta) & -(2(1-\vartheta)\lambda-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_2^{(k)} \\ w_3^{(k)} \\ \vdots \\ w_{n-1}^{(k)} \\ w_n^{(k)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda(1-\vartheta)\tilde{w}_1^{(k)} + \lambda\vartheta\tilde{w}_1^{(k+1)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda(1-\vartheta)\tilde{w}_{n+1}^{(k)} + \lambda\vartheta\tilde{w}_{n+1}^{(k+1)} \end{pmatrix}$$

Zur Vereinfachung der Diskretisierungsmatrizen verwenden wir ab sofort folgende Abkürzungen:

$$\hat{A} = diag\Big(-\vartheta\lambda, 2\lambda\vartheta + 1, -\vartheta\lambda\Big) \tag{2.18}$$

$$\hat{B} = diag\Big((1-\vartheta)\lambda, -(2(1-\vartheta)\lambda - 1), (1-\vartheta)\lambda\Big) \tag{2.19}$$

Die Matrizen $\hat{A}$ und $\hat{B}$ aus (2.18) und (2.19) sind die Matrizen, die entstehen, nachdem die bekannten Randwerte auf die rechte Seite übertragen wurden.

2.4.2 Konvergenz des Finiten-Differenzen-Verfahrens

Anhand der gelieferten Begriffsapperate soll für die Numerik der europäischen Optionen die Konvergenz der Finiten Differenzen vorgestellt werden. Dabei ist folgender Satz elementar:

SATZ 2.3. *Ein konsistentes und stabiles Verfahren ist konvergent und die Konvergenzordnung ist mindestens gleich der Konsistenzordnung*[6].

Wir beschränken uns zur Darstellung des obigen Satzes auf den Crank-Nicolson-Fall, d.h. $\vartheta = \frac{1}{2}$. Die theoretische Fundierung des Crank-Nicolson-Verfahrens liefert dann folgenden Satz:

SATZ 2.4. *Vorausgesetzt sei die Glattheit im Sinne von $u \in C^4$. Dann gilt*[7]*:*

1. *Die Konvergenzordnung des Verfahrens ist $O(\Delta\tau^2) + O(\Delta x^2)$.*
2. *Für jedes $1 \leq j \leq m-1$ ist das lineare Gleichungssystem (2.18) mit tridiagonaler Struktur zu lösen.*
3. *Stabilität gilt für alle $\Delta\tau > 0$.*

Alle drei Aussagen sind von zentraler Bedeutung. Die erste Aussage sichert ab, dass die Lösung der partiellen Differentialgleichung quadratisch konvergieren wird. Der Beweis befindet sich in [GroRoos94] Satz 6.3 (b) S.301. Die Konvergenzordnung der *Kombinationstechnik* sollte nur um einen logarithmischen Faktor schlechter ausfallen als die Ordnung der Vollgittertechnik. Durch eine $LU-$Zerlegung kann der numerische Berechnungsaufwand zum Lösen eines linearen Gleichungssystems mit Tribandstruktur wesentlich reduziert werden. Die Stabilität darf an keine Restriktionen gekoppelt sein, da sonst eine beliebige Zerlegung der Achsen zu einem nicht stabilen System führt. Aber eine beliebige Zerlegung der Gitter ist Grundvoraussetzung, um später bei der *Kombinationstechnik* auf anisotropen Gittern

[6] Der Satz ist [KnabAng01] S.27 entnommen.

[7] [Sey00] S.89

operieren zu können.

Mit der Diskretisierung der Achsen, siehe (2.15), kann das diskrete System kompakt als Folge linearer Gleichungssysteme aufgeschrieben werden

$$\begin{aligned}&\hat{A}\hat{w}^{(k+1)} = \hat{B}\hat{w}^{(k)} + g^{(k)}\ \forall\, 1 \le k \le m\\ &\text{mit den Unbekannten } \hat{w}^{(k)} := \left(\hat{w}_2^{(k)}, \ldots, \hat{w}_n^{(k)}\right)\end{aligned}$$

und den $(n-1) \times (n-1)$ dimensionalen Tribandmatrizen. Über alle Zeitschritte bleibt die Tribandmatrix aufgrund der Unabhängigkeit der diskretisierten Differentialoperatormatrix von der Zeit invariant, d.h. es muss nur einmal die Zerlegung der Matrix $\hat{A}$ mit einer Geltungsdauer für alle Zeitstufen berechnet werden. Die Folge von Gleichungssystemen

$$\{\hat{A}\hat{w}^{(k+1)} = \hat{B}\hat{w}^{(k)} + g^{(k)}\}_{k=1}^{m}$$

liefert aussagekräftige Näherungen, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind[8]:

1. Für einen beliebig fixierten Index $k^\star \in \{1, \ldots, m+1\}$ sollte eine eindeutige Lösung von $w^{(k^\star)}$ existieren.
2. Für die Grenzbetrachung gilt $\lim\limits_{\Delta x \to 0,\, \Delta\tau \to 0} \left(w_1^{(k^\star)}, \ldots, w_{n+1}^{(k^\star)}\right) = \left(u(x_1, \tau_{k^\star}), \ldots, u(x_{n+1}, \tau_{k^\star})\right)$. Die approximative Lösung $w^{(k^\star)}$ konvergiert gegen die exakte Lösung der PDE.

DEFINITION 2.1. *Das Differenzenverfahren heißt konsistent von der Ordnung $O(\Delta x^2 + \Delta\tau^2)$ (in der diskreten Maximumnorm) mit dem stetigen Differentialoperator L, der diskreten Operatormatrix $L_{\Delta x, \Delta\tau}$, der exakten Auswertung an den Gitterpunkten $R_{\Delta x, \Delta\tau} u$ und der exakten Auswertung des Operators an den Gitterpunkten $R_{\Delta x, \Delta\tau} Lu$, falls folgendes gilt:*

$$||L_{\Delta x, \Delta\tau} R_{\Delta x, \Delta\tau} u - R_{\Delta x, \Delta\tau} Lu||_\infty$$

Bemerkung 2.5. Die Konsistenz ist ein Maß für die Qualität der Approximation der Ableitungen durch die Differenzenquotienten.

Um die **Stabilität** zeigen zu können, müssen folgende Angaben vorausgeschickt werden:

LEMMA 2.1. *Die Eigenwerte μ_k^D und die Eigenvektoren $x^{(k)}$ der Tribandmatrix $D = diag\left(a, b, c\right) \in \mathbb{R}^{N \times N}$ sind*[9]

$$\begin{aligned}\mu_k^D &= a + 2b\sqrt{\frac{c}{b}} \cos\frac{k\pi}{N+1}\ \forall\ k = 1, \ldots, N\\ x^{(k)} &= \left(\sqrt{\frac{c}{b}} \sin\frac{k\pi}{N+1}, \left(\sqrt{\frac{c}{b}}\right)^2 \sin\frac{2k\pi}{N+1}, \ldots, \left(\sqrt{\frac{c}{b}}\right)^N \sin\frac{Nk\pi}{N+1}\right)^T.\end{aligned}$$

Beweis:
Einsetzen in die Eigenwertgleichung $Dx^{(k)} = \mu_k^D x^{(k)}$ und Koeffizientenvergleich liefert die gewünschten Eigenwerte und Eigenvektoren von D.

□

[8] [GünJüng03] S.158
[9] [Sey00] S.85 Lemma 4.3

Beweis von Satz 2.4 Aussage 3:

Für $g^{(k)} = 0 \,\forall\, 1 \leq k \leq m-1$ hat das Gleichungssystem (2.17) die Form $\hat{A}\hat{w}^{(k+1)} = \hat{B}\hat{w}^{(k)}$. Setzt man $G = diag(-1, 2, -1) \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$, dann ist

$$\hat{A} = I + \frac{\lambda}{2}G,\ \hat{B} = I - \frac{\lambda}{2}G \iff (I + \frac{\lambda}{2}G)\hat{w}^{(k+1)} = (I - \frac{\lambda}{2}G)\hat{w}^{(k)}.$$

Auf beiden Seiten der Gleichung mit 2 multipliziert ergibt

$$\underbrace{(2I + \lambda G)}_{=:C}\hat{w}^{(k+1)} = (2I - \lambda G)\hat{w}^{(k)} = (4I - 2I - \lambda G)\hat{w}^{(k)} = (4I - C)\hat{w}^{(k)}.$$

Daraus folgt $C\hat{w}^{(k+1)} = (4I - C)\hat{w}^{(k)}$. Wenn auf beiden Seiten dieser Gleichung mit der Inversen von C multipliziert wird, vorausgesetzt $det(C) \neq 0$, erhält man

$$\hat{w}^{(k+1)} = (4C^{-1} - I)\hat{w}^{(k)}.$$

Das Verfahren ist stabil, wenn für den Spektralradius ϱ der Verfahrensmatrix $(4C^{-1} - I)$ gilt, dass der Spektralradius $\varrho(4C^{-1} - I) < 1$ ist. Mit den Eigenwerten μ_k^C von C ist dies äquivalent zu $\left|\frac{4}{\mu_k^C} - 1\right| < 1,\ \forall\, k = 1, \ldots, m$. Nach Lemma 2.1 (mit $N = m-1,\ a = 2,$ $b = c = -1$) gilt

$$\mu_k^C = 2 + \lambda\Big(2 - 2\cos\frac{k\pi}{m}\Big) = 2 + 4\lambda\sin^2\frac{k\pi}{2m} > 2,$$

so dass $\frac{4}{\mu_k^C} < 2$ und folglich $\left|\frac{4}{\mu_k^C} - 1\right| < 1$ ist. Also ist das Crank-Nicolson-Verfahren $\forall\, \lambda > 0$ $(\Delta\tau > 0)$ stabil.

$\square$

Es folgt die **Konvergenzaussage:** Seien $w^{(k)} := \Big(\tilde{w}_1^{(k)}, w_2^{(k)} \ldots, w_n^{(k)}, \tilde{w}_{n+1}^{(k)}\Big)$ die Lösung des diskreten Systems und $u_{j,k} = u(x_j, \tau_k)\ \forall\ 1 \leq j \leq n+1,\ 1 \leq k \leq m+1$ die Lösungswerte der exakten Differentialgleichung mit dem Anfangswertproblem $w_j^{(1)} = u(x_j, \tau_1) = u(x_j, 0)$ und den Randwerten $\tilde{w}_1^{(k)},\ \tilde{w}_{n+1}^{(k)}$, die über (2.13) und (2.14) bestimmt werden. Ferner sei $u^{(k)} := \Big(u_{1,k}, \ldots, u_{n+1,k}\Big)$ der Lösungvektor mit den exakten Werten an den Stützstellen. Unter den Voraussetzungen des oben genannten Satzes 2.3 existiert eine Konstante $C_0 > 0$, so dass $\forall\ \Delta x, \Delta\tau > 0$ folgendes gilt:

$$\max_{k=1,\ldots,m} ||w^{(k)} - u^{(k)}||_{L^2} \leq C_0(\Delta\tau + \Delta x^2) \tag{2.20}$$

Im Crank-Nicolson-Fall $\vartheta = \frac{1}{2}$ (Semi-Diskretisierung) können wir $\Delta\tau + \Delta x^2$ durch $\Delta\tau^2 + \Delta x^2$ ersetzen. Somit erhalten wir eine quadratische Konvergenz in Zeit- und Kursrichtung. Die Formel (2.20) wird noch eine wichtige Rolle spielen, um die Konvergenzordnung einer Approximation bei einer bestimmten Gittermaschenweite anzugeben.

2.5 Numerik amerikanischer Optionen

2.5.1 Das Hindernisproblem bei amerikanischen Optionen

Würde bei amerikanischen Optionen der Wert der Option unter den Wert der Auszahlungsfunktion $\Lambda : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ mit $\Lambda(S) = (K - S)^+$ fallen, könnte ein risikofreier Gewinn eingestrichen werden. Dafür müssten gleichzeitig eine Aktie und der korrespondierende Put gekauft werden. Die Arbitrage würde sich innerhalb kürzester Zeit auflösen, da rationale Wirtschaftssubjekte diese Situation für sich auszubeuten wissen. Deshalb muss das Modell so konzipiert sein, dass die Auszahlungsfunktion größer gleich Null ist.

Das Hindernis sei die Auszahlungsfunktion $\Lambda(S)$. Die Randwerte zu extrem hohen und niedrigen Kursen seien asymptotisch bekannt. Der Aufsprungspunkt S_f, der auf dem Hindernis aufliegt, sei variabel und hänge von der Zeit t ab, d.h. $S_f = S_f(t)$. Damit gilt[10]:

$$V_P^{am}(S,t) > (K-S)^+ \text{ für } S > S_f(t) \text{ und } V_P^{am}(S,t) = (K-S)^+ \text{ für } S \leq S_f(t).$$

Die Lage des Randes $S_f(t)$ ist zunächst unbekannt. Deshalb spricht man in diesem Kontext von einem "freien Randwertproblem" oder "Hindernisproblem". Anschaulich ist, sich das Hindernisproblem so vorzustellen, dass man ein Seil, welches an zwei Enden fixiert ist, so über ein Hindernis spannt, dass eine minimale Seillänge angenommen wird. Das Hindernis sei beschrieben durch den Grahpen der transformierten Auszahlungsfunktion $\Lambda(S)$. Das Hindernisproblem lässt sich äquivalent als lineares Komplementaritätsproblem formulieren. Komplementaritätsprobleme finden in vielen weiteren Bereichen der modernen Mathematik ihre Anwendung. Die Charakterisierung von Gleichgewichten, notwendige Optimalitätsbedingungen vom Kuhn-Tucker-Typ für lineare und nichtlineare Programme, die Lösung von Matrixspielen sowie weitere Modelle der Ökonomie und Technik führen auf Komplementaritätsprobleme (linearer oder nichtlinearer Struktur).

Das stetige lineare Komplementaritätsproblem

Das Komplementaritätsproblem direkt auf die amerikanischen Optionen zugeschnitten, lautet[11]:

$$\Big(V - \Lambda(S)\Big)\Big(V_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS} + (r-\delta)SV_S - rV\Big) = 0 \tag{2.21}$$

$$-\Big(V_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS} + (r-\delta)SV_S - rV\Big) \geq 0 \tag{2.22}$$

$$\Big(V - \Lambda(S)\Big) \geq 0 \tag{2.23}$$

mit der Auszahlungsfunktion $V(S,T) = \Lambda(S) = \begin{cases} (K-S)^+, & \text{Put} \\ (S-K)^+, & \text{Call.} \end{cases}$

Dabei sind die Endwerte durch

$$V(S,T) = \Lambda(S), \quad S > 0$$

vorgegeben und die Randbedingungen lauten in diesen Fall
Put: $V(0,t) = K, \quad \lim_{S\to\infty} V(S,t) = 0$
Call: $V(0,t) = 0, \quad \lim_{S\to\infty}(V(S,t) - S) = 0, \quad 0 < t < T.$

Bemerkung 2.6. Bei den amerikanischen Optionen wurde der Dividendenfall mit $0 \leq \delta < r$ erneut berücksichtigt.

[10] Die Ausführungen orientieren sich an [Sey00] S.93-95.
[11] Die Überlegungen beruhen auf den Arbeiten aus [GünJüng03] S.202.

Transformation des Komplementaritätsproblems

Unter Verwendung der Transformationsschritte der bijektiven Koordinatentransformation aus Abschnitt 2.3, angewendet auf (2.21), ergibt sich

$$\Big(v(x,\tau) - \Lambda(Ke^x)\Big)\Big(-\frac{\sigma^2}{2}Kv_\tau + \frac{\sigma^2}{2}K(-v_x + v_{xx}) + Kv_x(r-\delta) - rKv\Big) = 0.$$

Die Funktion u definiert durch

$$u(x,\tau) = \frac{1}{K}exp\Big(\frac{1}{2}(q_\delta - 1)x + \frac{1}{4}(q_\delta - 1)^2\tau + q\tau\Big)v(x,\tau)$$

löst demnach die Gleichung

$$\Big(u(x,\tau) - f(x,\tau)\Big)(u_\tau - u_{xx}) = 0.$$

Setzt man noch

$$f(x,\tau) = exp\Big(\frac{1}{2}(q_\delta - 1)x + \frac{1}{4}(q_\delta - 1)^2\tau + q\tau\Big)\frac{\Lambda(Ke^x)}{K}, \tag{2.24}$$

so erhält man

$$\Big(u - f\Big)\Big(u_\tau - u_{xx}\Big) = 0.$$

Die transformierte Auszahlungsfunktion für den amerikanischen Put $\Lambda(Ke^x) = K(1-e^x)^+$ in (2.24) eingesetzt, führt auf

$$f(x,\tau) = exp\Big(\frac{1}{2}(q_\delta - 1)x + \frac{1}{4}(q_\delta - 1)^2\tau + q\tau\Big)\Big(1 - e^x\Big)^+.$$

Für den Put gilt demnach

$$f(x,\tau) = exp\Big(\frac{1}{4}(q_\delta - 1)^2 + 4q)\tau\Big)\Big(e^{\frac{1}{2}(q_\delta-1)x} - e^{\frac{1}{2}(q_\delta+1)x}\Big)^+,$$

und für den Call mit der transformierten Auszahlungsfunktion $\Lambda(Ke^x) = K(e^x - 1)^+$ gilt

$$f(x,\tau) = exp\Big(\frac{1}{4}(q_\delta - 1)^2 + 4q)\tau\Big)\Big(e^{\frac{1}{2}(q_\delta+1)x} - e^{\frac{1}{2}(q_\delta-1)x}\Big)^+$$

mit den bekannten Abkürzungen $q = \frac{2r}{\sigma^2}$ und $q_\delta = \frac{2(r-\delta)}{\sigma^2}$.

Bemerkung 2.7. Das stetige transformierte Komplementaritätsproblem (2.21) - (2.23) ist äquivalent zu

$$\Big(u_\tau - u_{xx}\Big)\Big(u - f\Big) = 0, \quad u_\tau - u_{xx} \geq 0, \quad u - f \geq 0,$$

mit den Rand- und Anfangsbedingungen

$$u(x,0) = f(x,0) \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \tag{2.25}$$

$$\text{Put:} \quad \lim_{x\to\infty}\Big(u(x,\tau) - f(x,\tau)\Big) = 0, \quad \lim_{x\to\infty} u(x,\tau) = 0 \tag{2.26}$$

$$\text{Call:} \quad \lim_{x\to\infty} u(x,\tau) = 0, \quad \lim_{x\to\infty}\Big(u(x,\tau) - f(x,\tau)\Big) = 0. \tag{2.27}$$

2.5.2 Approximation mittels Finiter Differenzen

Durch Diskretisierung eines "freien Randwertproblems" ensteht ein lineares Komplementaritätsproblem. Die Eingangsdaten für das lineare Komplementaritätsproblem sind dann die quadratische Matrix $\hat{A}$ und ein Vektor $b = B\hat{w}^{(k)} + g^{(k)}$ aus (2.17), S.17 für die rechte Seite des Ungleichungssystems.

Für die Approximation mittels Finiter Differenzen betrachten wir dasselbe Gitter aus (2.15). Dabei sei w_j die Approximation zu $u(x_j)$. Um an die Diskretisierung des linearen Komplementaritätsproblems zu gelangen, benötigen wir noch folgende Vektorabkürzungen:

$$b^{(k)} := \left(b_2^{(k)}, \ldots, b_n^{(k)}\right)^T \in \mathbb{R}^{n-1}, \quad \hat{w}^{(k)} := \left(w_2^{(k)}, \ldots, w_n^{(k)}\right)^T, \quad f^{(k)} := \left(f_2^{(k)}, \ldots, f_n^{(k)}\right)^T$$

Damit können wir folgendes lineares Ungleichungssystem aufstellen:

$$\hat{A}\hat{w}^{(k+1)} \geq b^{(k)} \quad \forall\, k = 1, \ldots, m \text{ mit } b^{(k)} := \hat{B}\hat{w}^{(k)} + g^{(k)}$$

Die nächste Bemerkung nimmt die oben stehenden Vektorabkürzungen auf.

Bemerkung 2.8 (Diskretes lineares Komplementaritätsproblem)**.** Das diskrete Komplementaritätsproblem, das für jeden Zeitschritt $\tau_k \quad \forall\, k = 1, \ldots, m$ gelöst werden muss, lautet in kompakter Matrixschreibweise[12]: Suche $w^{(k+1)} \in \mathbb{R}^{n-1}$ mit

$$(\hat{A}w^{(k+1)} - b)(w^{(k+1)} - f^{(k+1)}) = 0, \quad \hat{A}w^{(k+1)} - b \geq 0, \quad w^{(k+1)} - f^{(k+1)} \geq 0. \tag{2.28}$$

Das Problem von (2.28) ist äquivalent zu

$$\min\{\hat{A}w^{(k+1)} - b_j w^{(k+1)} - f^{(k+1)}\} = 0. \tag{2.29}$$

2.5.3 Das Projektions-SOR-Verfahren

Zur Lösung des diskreten Komplementaritätsproblems muss ein iterativer Löser für große lineare Gleichungssysteme herangezogen werden. Der Vorteil des iterativen Gauß-Seidel-Verfahrens ist die speicherschonende Behandlung zur Berechnung der Iterationslösung. Die alte Lösung kann durch die neue Lösung überschrieben werden. Durch das SOR-Verfahren mit dem Relaxationsparameter ω kann die Konvergenzgeschwindigkeit des Gauß-Seidel-Verfahrens beschleunigt werden. Beginnen wollen wir mit dem Gauß-Seidel- bzw. Einschrittverfahren.

Das Gauß-Seidel-Verfahren komponentenweise aufgeschrieben:[13]

$$w_j^{(k)} = \frac{1}{a_{jj}}\Big(b_j - \sum_{l=1}^{j-1} a_{jl} w_l^{(k)} - \sum_{l=j}^{n} a_{jl} w_l^{(k-1)}\Big)$$

Successive-Overrelaxation-Verfahren (SOR) komponetenweise aufgeschrieben:

$$w_j^{(k)} = \frac{\omega}{a_{jj}}\Big(b_j - \sum_{l=1}^{j-1} a_{jl} w_l^{(k)} - \sum_{l=j+1}^{n} a_j l w_l^{(k-1)} + \frac{1-\omega}{\omega} a_{jj} w_j^{(k-1)}\Big)$$

[12]Siehe [GünJüng03] S.212 oben.

[13]Die Herleitung des Iterationsverfahrens kann [Hack93] S.22-23 oder [Herr01] S.116-119 entnommen werden.

$$z_j^{(k)} = a_{jj}^{-1}\Big(Lw^{(k-1)} + Uw^{(k)} + b\Big)_j \text{ und } w_j^{(k+1)} = w_j^{(k)} + \omega(z_j^{(k)} - w_j^{(k)})$$

Es folgt die Herleitung der wesentlichen Schritte des Projektions-SOR-Verfahrens[14]:

Die Matrix $\hat{A}$ aus (2.18) zerfällt in die Diagonale D, die untere Dreiecksmatrix L und die obere Dreiecksmatrix U. Mit $\hat{A} = D - L - U$ ist $\hat{A}\hat{w} = b$ äquivalent zu $\hat{w} - D^{-1}(L\hat{w} + U\hat{w} - b) = 0$. Damit ist (2.29) äquivalent zu

$$\begin{aligned} &\min\{\hat{A}\hat{w} - b, \hat{w} - f\} = \min\{\hat{w} - D^{-1}(L\hat{w} + U\hat{w} - b), \hat{w} - f\} = 0 \\ \text{bzw. } &\max\{D^{-1}(L\hat{w} + U\hat{w} + b), f\} = \hat{w}. \end{aligned}$$

Dann erhalten wir eine **Verallgemeinerung des SOR-Verfahrens, das sogenannte Projektions-SOR-Verfahren**

$$z_j^{(k)} = a_{jj}^{-1}(Lw^{(k+1)} + Uw^{(k)} + b)_j \tag{2.30}$$

$$w_j^{(k+1)} = \max\{w_j^{(k)} + \omega(z_j^{(k)} - w_{(k)}), f_j^{(k)}\} \tag{2.31}$$

$\forall\ j \in \{2, \ldots, n\}$, $\forall\ k \in \{1, \ldots, m\}$. Der Eintrag $z_j^{(k)}$ lässt sich, unter der Verwendung der diskreten Operatormatrix der amerikanischen Option, weiter spezifizieren zu

$$z_j^{(k)} = \frac{1}{2\lambda\vartheta}\Big(\lambda\vartheta(w_{j-1}^{(k+1)} + w_{j+1}^{(k)}) + b_j\Big).$$

Die Konvergenz des Projektions-SOR-Verfahrens gegen eine Lösung des diskreten Komplementaritätsproblems für $1 < \omega < 2$ wird durch den folgenden Satz gewährleistet[15]:

SATZ 2.5 (Satz von Cryer). *Seien $\hat{A} \in \mathbb{R}^{n-1\times n-1}$ eine symmetrische, positiv definite Matrix, $b, f \in \mathbb{R}^{n-1}$ und $1 < \omega < 2$, dann konvergiert die Vektorfolge $\{w^{(k)}\}_k$, definiert durch (2.30), gegen die eindeutig definierte Lösung von (2.28) bzw. (2.29).*

Bemerkung 2.9. Der Beweis steht auf S.214-216 [GünJüng03]. Der Satz von Cryer sichert ab, dass das Projektions-SOR-Iterationsverfahren für $k \to \infty$ wirklich eine Lösung des diskreten linearen Komplementaritätsproblems aus (2.28) bzw. (2.29) liefert. Die Eindeutigkeit der Lösung wird durch eine Äquivalenz zwischen dem linearen Komplementaritätsproblem aus (2.28) bzw. (2.29) zu dem folgenden Minimierungsproblem gezeigt:

$$\text{Suche } w \in \mathbb{R}^{n-1} \text{ mit } w_{j+1}^{(k)} \geq f_{j+1}^{(k)} \text{ und } J(w) = \min_{v \geq w} J(v),$$

wobei $J(v) := \frac{1}{2}v^T\hat{A}v - b^Tv$ sei.

2.6 Europäische und amerikanische Optionen im Vergleich

Abschließend soll der Vergleich zwischen amerikanischen und europäischen Optionen noch einmal die Unterschiede zwischen beiden Optionstypen hervorheben. Die Abbildung 2.1 (rechts) zeigt, dass der Wert einer amerikanischen Call-Option größer ausfällt als der Wert einer europäischen Call-Option, sobald die Call-Option "ins Geld kommt", d.h. $S \geq K$

[14] [GünJüng03] S.211-217.

[15] Es wurde mit [GünJüng03] S. 213 gearbeitet.

gilt. Die Nachfrage des Underlyings steigt, wenn die Aktie "ex-dividende" notiert, weil die potentiellen Aktieninhaber die Dividendenerwartung für sich antizipieren. Den Kaufoptionsinhabern fließt kein Dividendenertrag zu. Diese erleiden einen Nachteil, Inhaber von Puts vereinnahmen einen geldwerten Vorteil. Aufgrund der Reagibilität zwischen Underlying- und Optionswert $\left(\Delta := \frac{\partial V(S,t)}{\partial S} > 0\right)$ muss auch der Wert der Option steigen. Um der Benachteiligung bei Dividendenausschüttung zu entgehen, können die Optionsverkäufer für dividendengeschützte Optionen einen Abschlag auf den Basispreis K einfordern. Unter der Kursreagibilität bzw. -sensitivität versteht man die Änderung des Optionspreises im Verhältnis zur Änderung des zugrundliegenden Basiswertes und kürzt sie in der Fachsprache der Investmentbanker und Börsianer mit Δ ab. Ohne Zahlung von Dividenden während der Erklärungsfrist muss der Wert der amerikanischen und europäischen Call-Option identisch sein, da sich der Inhaber bei einer vorzeitigen Ausübungsstrategie nicht besser stellen kann.

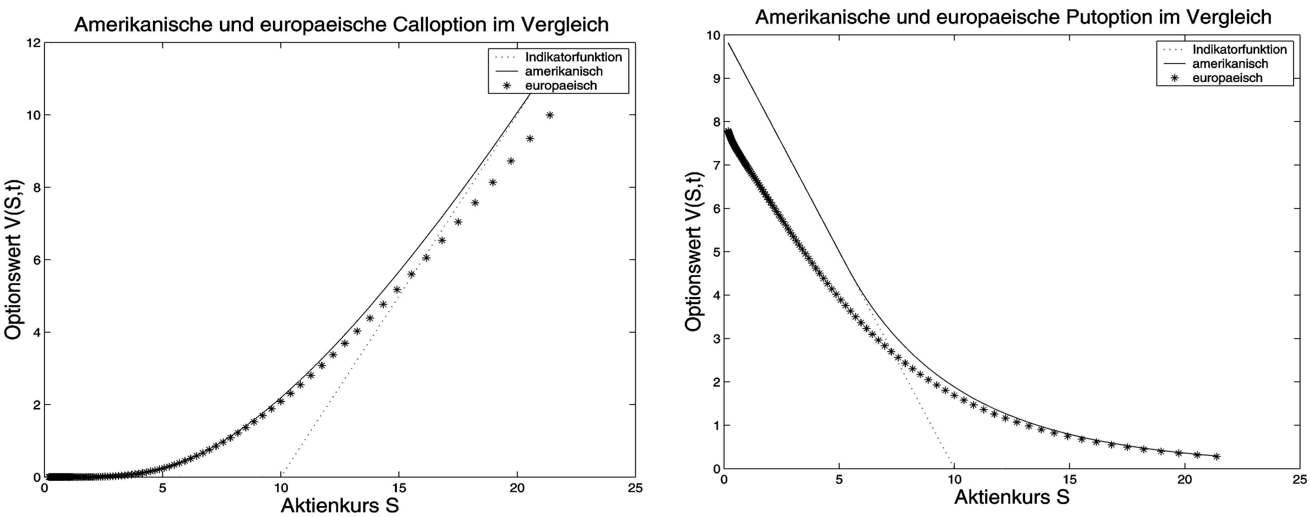

Abbildung 2.1: Amerikanische Put- und Call-Option im Überblick mit folgenden Ausgangsdaten: $n = m = 200,\ K = 10.0,\ a = 5,\ T = 1.0,\ S = K = 10,\ r = 0.25,\ \sigma = 0.6,\ \delta = 0.2,\ \vartheta = 0.5$

In der Abbildung 2.1 (links) ist zu erkennen, dass der Wert einer amerikanischen Put-Option größer ist als der Wert einer europäischen Put-Option. Die finanztechnische Begründung ist darin zusehen, dass bei einer amerikanischen Put-Option das zusätzliche Recht eingeräumt wird, auch während der Erklärungsfrist die Put-Option ausüben zu können. Das zusätzlich eingeräumte Recht der jederzeit möglichen Ausübung begründet die Verteuerung der amerikanischen Put-Option. Bei einer Put-Option auf eine Aktie mit Dividendenberechtigung innerhalb der Erklärungsfrist können die Optionsverkäufer einen Basisabschlag fordern, um nicht durch die Dividendenausschüttung geschädigt zu werden. Durch den gestiegenen Marktwert der Aktie S^{nach} vereinnahmen die Verkäufer einer Put-Option weniger am Pay Off der Option $(K - S^{vor})^+ < (K - S^{nach})^+,\ S^{nach} > S^{vor} > 0,\ K > 0$. Schaut man sich beide Abbildungen an, wird ersichtlich, dass ab dem Aufsprungspunkt die amerikanische Option für $t = 0$ genau auf der charakteristischen Auszahlungsfunktion $\Lambda_P(S)$ aufsitzt. Ab dem Aufsprungspunkt $S_f(t)$ nimmt die amerikanische Option denselben linearen Kurvenverlauf wie die Auszahlungsfunktion $\Lambda_P(S)$ an. Daran erkennen wir die Problemstellung des Hindernisproblems unmissverständlich.

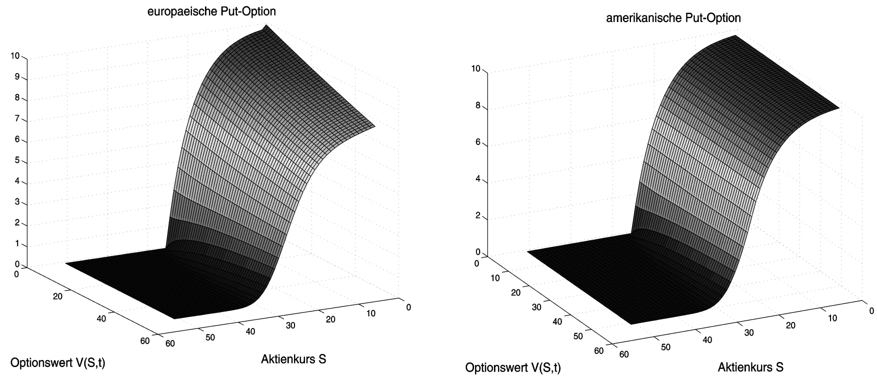

Abbildung 2.2: Europäische und amerikanische Put-Option im Vergleich mit folgenden Daten: $n = m = 50,\ K = 10.0,\ a = 4,\ T = 1.0,\ S = K = 10,\ r = 0.25,\ \sigma = 0.6,\ \delta = 0.2,\ \vartheta = 0.5$

Die Abbildung 2.2 stellt in Flächenansicht den amerikanischen und europäischen Put gegenüber. Die Unterschiede im Kurvenverlauf zu verschiedenen Zeiten zwischen beiden Optionen sind deutlich in dieser Flächenabbildung zu erkennen.

3 Numerik von Basket-Optionen

3.1 Einsatzbereiche von Basket-Optionen

Basket-Optionsscheine sind nichts anderes als multivariate Optionen, bei denen die Preise verschiedener Underlyings additiv miteinander verknüpft werden. So existieren Basket-Optionen auf Aktien oder Obligationen ebenso für Währungen und Rohstoffe. Aus finanzierungstheoretischer Sicht ist der Hauptgrund für eine Entscheidung, Basket-Optionen in das Portefeuillekalkül eines Investors einzubinden, darin zu sehen, das Diversifikationsbedürfnis, welches jeder Investor besitzt, in ausreichendem Maße zu befriedigen. Auf Grund der Tatsache, dass Basket-Optionen eher defensive Instrumente darstellen, werden sie häufig auf Körbe mit Aktien aus Emerging-Markets emittiert.

Einerseits dienen Basket-Optionen zur Absicherung ganzer Portefeuillestrategien, anderseits dienen sie in der Industrie zur Absicherung ganzer Währungskörbe. In beiden Fällen nutzen die Optionskäufer die Vorteile, die sich aus einer geringen Korrelation zwischen den einzelnen Assets ergeben. Damit spiegelt sich deutlich der Hedgingcharakter von Optionen wider. Die Basket-Optionen eignen sich für die mehrdimensionale Betrachtung der *Kombinationstechnik*, denn im höherdimensionalen Fall ist der numerische Aufwand geringer als im Vergleich zur Vollgittertechnik. Betrachtet werden $(d-1)-$Basiswerte bzw. Aktien zu deren Kursentwicklung in der Zeit $(S_1(t), \ldots, S_{d-1}(t)) \ \in \mathbb{R}^{d-1}, \ d \in \mathbb{N}$. Die schon in dem vorausgegangen Kapitel 2 verwendeten Finiten Differenzen (Volldiskretisierung) werden wieder zum Einsatz kommen[1].

3.2 Portefeuillediversifikation durch Basket-Optionen

Nachfolgend soll kurz eine theoretische **Begründung für die Diversifikationsbestrebungen** der Investoren gegeben werden: Bekannt aus der Optionspreistheorie ist, dass das Risiko der Basket-Optionen kleiner ist als die Summe der Risiken der einzelnen Assets. Diese Subadditivität verdeutlicht den Diversifikationseffekt. Aber je größer das Risiko ausfällt, desto größer wird der Wert der Option. Angenommen, wir lassen die Abhängigkeit des Optionspreises V von der Volatilität σ_j zu, gilt $\Upsilon_j := \frac{\partial V(S_j(t),t)}{\partial \sigma_j} > 0, \ \forall \ j \in J := \{1, \ldots, d-1\}$, d.h. der Wert der Option gewinnt hinzu, wenn die Schwankung des Basiswertes an den Märkten ansteigt[2]. Das negative Riskio ist nach unten hin begrenzt. Denn sollten sich die Basiswerte für den Optionsinhaber ungünstig entwickeln, wird der Inhaber die Option nicht ausüben. Deshalb partizipiert der Inhaber von jeder Risikoänderung. Um den Hedgingeffekt mathematisch zu verdeutlichen, betrachten wir den folgenden Satz[3]:

[1] Als Alternative zur PDE-Lösung von Basket-Optionen kann die Black-Scholes-Gleichung, bestehend aus $(d-1)$ dimensionalen Riemannintegralen, mit Hilfe der Monte-Carlo-Simulation gelöst werden. Um das Integral auszuwerten, müssen durch Simulation Pfade erzeugt werden, die den Basiswertkurs approximieren. Näheres siehe [GünJüng03] S.98-143.

[2] Nachweis über die Ableitungsbildung für den stetigen Fall einer europäischen Option. Dabei drückt Υ die Sensitivität des Optionswertes gegenüber der Änderung des Risikos des zugrundeliegenden Basiswertes aus. Das Vorzeichen der Ableitung gilt für Call- und Put-Option gleichermaßen.

[3] Der Satz ist aus [Kür03] S.90 entnommen.

SATZ 3.1. *Ein Investor besitze ein Portefeuille von "Plain Vanilla" (einfache Optionen) auf die einzelnen Assets S_j $\forall\ j \in J$. Dann ist dieses Portfeuille bestehend aus $(S_1, \ldots, S_{d-1}) := (S_1(T), \ldots, S_{d-1}(T))$ Assets zum Zeitpunkt T wertvoller als eine Basket-Option (in Form einer europäischen Call-Option) auf das entsprechende Portefeuille von Assets. Sei noch $\lambda_j \in [0,1]$ $\forall\ j \in J$ mit $\sum_{j=1}^{d-1} \lambda_j = 1$. Bei $\Pi_{Q^\star}(.)$ handelt es sich um das lineare Bewertungsfuntkional des Marktes bzgl. des äquivalenten risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaßes[4]. Dann lautet die mathematische Version des Problems*

$$\sum_{j=1}^{d-1} \lambda_j \Pi_{Q^\star}\Big((S_j - K)^+\Big) = \Pi_{Q^\star}\Big(\sum_{j=1}^{d-1} \lambda_j (S_j - K)^+\Big) \geq \Pi_{Q^\star}\Big(\sum_{j=1}^{d-1} (\lambda_j S_j - K)^+\Big).$$

Bemerkung 3.1. Der Beweis des Satzes 3.1 erfolgt über die Ausnutzung der Linearitätseigenschaft des Bewertungsfunktionals. Gilt doch für konvexe Funktionen

$$f\Big(\frac{1}{d-1}\sum_{j=1}^{d-1} S_j\Big) = \frac{1}{d-1} f\Big(\sum_{j=1}^{d-1} S_j\Big) \leq \frac{1}{d-1}\sum_{j=1}^{d-1} f(S_j)$$

mit $f(x) := \max\{x - K, 0\} = (x - K)^+$.

3.3 Multivariate Black-Scholes-Gleichung

Wiederholen wir die Herleitung der eindimensionalen Black-Scholes-Gleichung am Anfang aus Kapitel 2 für die $(d-1)-$dimensionale Black-Scholes-Gleichung, dann betrachten wir zuerst das folgende risikolose und selbstfinanzierende Portefeuille, beschrieben durch einen stochastischen Portefeuille-Prozess $Y = \Big(Y(t)\Big)_{t\geq 0}$,

$$Y(t) = c_0(t)A(t) + \sum_{j=1}^{d-1} c_j(t)S_j(t)\ - V(S_1(t), \ldots, S_{d-1}(t), t).$$

Dabei sei $c_0(t)$ das anteilige Gewicht am Bond $A(t)$, $c_j(t)$ $\forall\ j \in J$ die anteiligen Gewichte an den Basiswerten $S_j(t)$ und $V(S_1(t), \ldots, S_{d-1}(t), t)$ der Wert der verkauften Option $V(S,t)$ mit dem mehrdimensionalen stochastischen Aktienkursprozess $S = \Big(S_1(t), \ldots, S_{d-1}(t)\Big)_{t\geq 0}$.
So erhalten wir nach einer umfangreichen Rechnung die folgende $(d-1)-$dimensionale Black-Scholes-Gleichung:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial V(S,t)}{\partial t} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d-1} \varrho_{i,j}\ \sigma_i\ \sigma_j\ S_i(t)\ S_j(t) \frac{\partial^2 V(S,t)}{\partial s_i \partial s_j}\Big|_{(S_i(t),t),(S_j(t),t)} \\ &+ r\sum_{i=1}^{d-1} S_i(t)\frac{\partial V(S,t)}{\partial s_i}\Big|_{(S_i(t),t)} - rV(S,t) = 0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

[4]Ausführungen zum äquivalenten risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaß finden sich in [Irle98] S.29-34. Dieses spezielle Wahrscheinlichkeitsmaß hat große Bedeutung beim Fundamentalsatz der Preistheorie. Für ein $(d-1)-$Periodenpreismodell sind dann folgende beiden Aussagen gleichwertig: Das Modell ist arbitragefrei. Es existiert ein äquivalentes Martingalmaß $Q^\star$.

mit der Endbedingung bzw. Auszahlungsfunktion $V(S,T) = \Lambda(S_1(T),\dots,S_{d-1}(T))$. Dabei sei $\varrho_{i,j}$ die Korrelation zwischen dem $i-$ten und $j-$ten Asset. Die Korrelation bedeutet, dass die Kursänderungen der beiden Basiswerte $S_i(t)$ und $S_j(t)\ \forall\ i \neq j \in J,\ t > 0$ statistisch voneinander abhängen. Ist die Korrelation negativ, d.h. sie liegt zwischen $-1 < \varrho_{i,j} < 0$, dann gehen die Kursveränderungen in die jeweils gegensätzliche Richtung. Diese Strategie verfolgen Wirtschaftssubjekte auf den Finanzmärkten, um so ihre Risiken besser streuen zu können. Für $\varrho_{i,j} = -1$ kompensieren sich die Kursveränderungen vollständig, d.h. es liegt perfektes Hedging vor. Für $\varrho_{i,j} = 0$ sind die Basiswerte vollkommen unkorreliert, d.h. es gibt zwischen den Assets keinen statistischen Zusammenhang. Im Bereich $0 < \varrho_{i,j} \leq 1$ sind die Basiswerte positiv miteinander korreliert, d.h. beide Kursentwicklungen tendieren in dieselbe Richtung. Gewinnen beide Assets an Wert, ist diese Entwicklung als erfreulich zu werten.

Betrachten wir als Nächstes eine europäische Call-Option auf ein Portefeuille. Dieses Portefeuille besteht aus zwei Aktien mit Werten $S_1(t)$ und $S_2(t)$. Der statistische Zusammenhang zwischen beiden Aktien wird über die Korrelation ϱ gemessen. Dabei erfüllt der Optionspreis $V(S(t),t) = V(S_1(t),S_2(t),t)$ für $S_1(t),\ S_2(t) > 0,\ 0 < t < T$ die Gleichung

$$\frac{\partial V(S(t),t)}{\partial t} + \frac{1}{2}\Big(\sigma_1^2 S_1^2(t)\frac{\partial^2 V(S(t),t)}{\partial s_1^2}\Big|_{(S_1(t),t)} + 2\varrho\sigma_1\sigma_2 S_1(t)S_2(t)\frac{\partial^2 V(S(t),t)}{\partial s_1\partial s_2}\Big|_{(S_1(t),t),(S_2(t),t)}$$
$$+ \sigma_2^2 S_2^2(t)\frac{\partial^2 V}{\partial s_2^2}\Big|_{(S_2(t),t)}\Big) + r\Big(S_1(t)\frac{\partial V}{\partial s_1}\Big|_{(S_1(t),t)} + S_2(t)\frac{\partial V}{\partial s_2}\Big|_{(S_2(t),t)}\Big) - rV(S(t),t) = 0.$$

Mit der zugehörigen Endbedingung

$$V(S_1,S_2,T) = (\alpha_1 S_1 + \alpha_2 S_2 - K)^+,$$

ist das eine zweidimensionale parabolische partielle Differentialgleichung in den Variablen S_1, S_2 und t, wobei mit $\alpha_1,\alpha_2 > 0$ die Portefeuillegewichte gegeben sind. Das zulässige Gebiet für die beiden Aktien S_1 uns S_2 sei $(S_1,S_2) \in (0,\infty)^2$. Im nächsten Schritt kommen wir zur Modellierung der Randbedingungen. Die Randwertbereiche werden künstlich eingeführt über asymptotische Funktionen. Im allgemeinen Fall betrachten wir eine Basket-Option auf $(d-1)$ Basiswerte. Beispielhaft soll dies für eine Basket-Option auf zwei und drei Aktien demonstriert werden, da später hierzu die Numerik besprochen wird. Beginnen wollen wir mit der Betrachtung für zwei Aktien.

1. $\mathbf{S_1 = 0,\ S_2 \in (0,\infty)}$
   Dies entspricht einem europäischen Call auf die Aktie S_2 mit der Auszahlungsfunktion $\alpha_2(S_2 - \frac{K}{\alpha_2})^+$. Für die Randbedingung kann dann geschrieben werden:
   $$V(0,S_2,t) = \alpha_2\left(S_2\Phi(d_1) - \alpha_2^{-1}Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2)\right)$$
   mit $d_{1/2} = \frac{\ln(\alpha_2 S_2/K)+(r\pm\sigma_2^2/2)(T-t)}{\sigma_2\sqrt{T-t}}$.
2. $\mathbf{S_2 = 0,\ S_1 \in (0,\infty)}$
   Wie im ersten Fall, nur jetzt für S_1
   $$V(S_1,0,t) = \alpha_1\left(S_1\Phi(\hat{d}_1) - \alpha_1^{-1}Ke^{-r(T-t)}\Phi(\hat{d}_2)\right)$$
   mit $\hat{d}_{1/2} = \frac{\ln(\alpha_1 S_1/K)+(r\pm\sigma_1^2/2)(T-t)}{\sigma_1\sqrt{T-t}}$.

3. $\mathbf{S_1} \to \infty,\ \mathbf{S_2} \in (\mathbf{0}, \infty)$
   Bei sehr großem S_1 ist der Wert des Calls approximativ gleich $\alpha_1 S_1 + \alpha_2 S_2 - K$. Unter Grenzwertbetrachtung ergibt sich dann

$$\lim_{S_1 \to \infty} (V(S_1, S_2, t) - \alpha_1 S_1) = e^{-r(T-t)}(\alpha_2 S_2 - K)$$

   mit der Abdiskontierung von $\alpha_2 S_2 - K$ für den Zeitpunkt t.

4. $\mathbf{S_2} \to \infty,\ \mathbf{S_1} \in (\mathbf{0}, \infty)$
   In Analogie zu dem vorliegenden Fall jetzt aber für S_1:

$$\lim_{S_2 \to \infty} (V(S_1, S_2, t) - \alpha_2 S_2) = e^{-r(T-t)}(\alpha_1 S_1 - K)$$

   mit der Abdiskontierung von $\alpha_1 S_1 - K$ für den Zeitpunkt t.

Des Weiteren interessiert uns der Fall für drei Aktien bzw. für $d = 4$ inklusive der Zeitrichtung, um später die Wirkung der *Kombinationstechnik* verdeutlichen zu können. Die Black-Scholes-Gleichung kann durch Einsetzen von $d = 4$ in (3.1) gebildet werden. Geometrisch veranschaulicht werden kann sich der Fall für drei Aktien über einen Kubus, wobei jede der drei Raumrichtungen für eine Kursrichtung steht. In den Kanten des Kubus (zwei Koordinaten sind Null und eine Koordinate nimmt einen beliebigen Wert an) und den Ecken (alle drei Koordinaten sind Null oder nehmen einen beliebigen Wert an) können Werte vorgegeben werden, indem man asymptotische Funktionen für die Randwerte einsetzt. In den sechs Seitenflächen des Kubus (nur genau in eine Richtung Null oder beliebig) muss man Randwerte unter Verwendung der Kanten und Eckwerte des Kubus berechnen. Bei einer Verallgemeinerung auf den $(d-1)-$dimensionalen Fall müssen die Ränder des $(d-1)-$dimensionalen Problems $\forall\ d \geq 3$ numerisch gelöst werden, indem sie mit den numerischen Ergebnissen des $(d-2)-$dimensionalen Problems verbunden werden. Dies kann nur über einen Algorithmus geschehen, der sich rekursiv aufruft, bis er in den zweidimensionalen Fall vorgedrungen ist, wofür eine geschlossene Lösungsformel für den Rand existiert. Für unsere weitere Betrachtungsweise werden die numerischen Resultate $V(S_1, \ldots, S_{d-1}, t)$ mit $S_j \in (0, \infty)\ \forall\ 1 \leq j \leq d-1$ und $t = 0$ von Interesse sein. Schließlich wird über den Optionspreiswert $V(S_1, \ldots, S_{d-1}, 0)$ das Finanzderivat bewertet, d.h. dem Investor in Rechnung gestellt. Dies ist der in $t = 0$ zu entrichtende Preis zuzüglich eines Aufpreises als Gewinnmarge für das emittierende Investmenthaus. Der dann entstehende Preis stellt eine Versicherungsprämie des Investors dar, um sein Portefeuille gegen Kursschwankungen abzusichern.

3.4 Transformation auf eine Advektions-Diffusions-Reaktions-Gleichung

Zur Vereinfachung der Darstellungsform der Differentialgleichung wird folgende bijektive Koordinatentransformation vorgenommen [5]:

$$u := \tfrac{V}{K},\ x_{i_k} = \tfrac{1}{\sigma_{i_j}} \ln\left(\tfrac{S_{i_k}}{K}\right) \quad \forall\ k\ \in\ J, \text{ aus } V_t = K u_\tau,\ V_{S_{i_k}} = \tfrac{K}{\sigma_{i_k} S_{i_k}} u_{x_{i_k}},$$
$$V_{S_{i_j} S_{i_k}} = \tfrac{K}{\sigma_{i_k}^2 S_{i_k}^2}\left(u_{x_{i_j} x_{i_k}} - \sigma_{i_k} u_{x_{i_j}}\right), \quad \forall\ j,k \in J \quad, \tau = T - t,$$

[5] Transformation von [GünJüng03] auf S.189 entnommen.

wobei $\sigma_{i_k} > 0$ die Standardabweichung ist. Dadurch ergibt sich die folgende transformierte Advektions-Diffusions-Reaktions-Gleichung:

$$u_\tau + \underbrace{div(Corr\ \nabla u)}_{\text{Diffusion}} + \underbrace{\vec{q}^T \nabla u}_{\text{Advektion}} - \underbrace{r \cdot u}_{\text{Reaktion}} = 0$$

Um die multivariate parabolische Gleichung kompakter aufschreiben zu können, sei $Corr \in \mathbb{R}^{(d-1)\times(d-1)}$ aus Beispiel 1.1, S.5 die symmetrische Korrelationsmatrix mit den paarweisen Korrelationen $\varrho_{i_j,i_k}\ \forall\, j,k\ \in J$ zwischen den Assets. Außerdem sei $\vec{q}$ ein Hilfsvektor für die Transformation.

$$\vec{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_{d-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{r}{\sigma_{i_1}} - \frac{\sigma_{i_1}}{2} \\ \vdots \\ \frac{r}{\sigma_{i_{d-1}}} - \frac{\sigma_{i_{d-1}}}{2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d-1} \text{ und } Corr = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \varrho_{i_1,i_2} & \cdots & \varrho_{i_1,i_{d-1}} \\ \varrho_{i_2,i_1} & 1 & \cdots & \varrho_{i_2,i_{d-1}} \\ \vdots & \varrho_{i_{d-1},i_2} & \ddots & \varrho_{i_{d-2},i_{d-1}} \\ \varrho_{i_{d-1},i_1} & \cdots & \varrho_{i_{d-1},i_{d-2}} & 1 \end{pmatrix}$$

mit $-1 \le \varrho_{i_j,i_k} \le 1$. Die Divergenz[6] ausgewertet für den multivariaten räumlichen $(d-1)-$dimensionalen Fall:

$$div(Corr\ \nabla u) = div\left(\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \varrho_{i_1,i_2} & \cdots & \varrho_{i_1,i_{d-1}} \\ \varrho_{i_2,i_1} & 1 & \cdots & \varrho_{i_2,i_{d-1}} \\ \vdots & \varrho_{i_{d-1},i_2} & \ddots & \varrho_{i_{d-2},i_{d-1}} \\ \varrho_{i_{d-1},i_1} & \cdots & \varrho_{i_{d-1},i_{d-2}} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{x_{i_1}} \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{x_{i_{d-1}}} \end{pmatrix} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot div \begin{pmatrix} u_{x_{i_1}} + \varrho_{i_1,i_2} u_{x_{i_2}} + \varrho_{i_1,i_3} u_{x_{i_3}} + \ldots + \varrho_{i_1,i_{d-1}} u_{x_{i_{d-1}}} \\ \varrho_{i_2,i_1} u_{x_{i_1}} + u_{x_{i_2}} + \varrho_{i_2,i_3} u_{x_{i_3}} + \ldots + \varrho_{i_2,i_{d-1}} u_{x_{i_{d-1}}} \\ \varrho_{i_3,i_1} u_{x_{i_1}} + \varrho_{i_3,i_2} u_{x_{i_2}} + u_{x_{i_3}} + \ldots + \varrho_{i_3,i_{d-1}} u_{x_{i_{d-1}}} \\ \vdots \\ \varrho_{i_{d-1},i_1} u_{x_{i_1}} + \varrho_{i_{d-1},i_2} u_{x_{i_2}} + \ldots + \varrho_{i_{d-1},i_{d-2}} u_{x_{i_{d-2}}} + u_{x_{i_{d-1}}} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \Big(u_{x_{i_1}} + \varrho_{i_1,i_2} u_{x_{i_2}} + \varrho_{i_1,i_3} u_{x_{i_3}} + \ldots + \varrho_{i_1,i_{d-1}} u_{x_{i_{d-1}}} \Big) \\ \frac{\partial}{\partial x_{i_2}} \Big(\varrho_{i_2,i_1} u_{x_{i_1}} + u_{x_{i_2}} + \varrho_{i_2,i_3} u_{x_{i_3}} + \ldots + \varrho_{i_2,i_{d-1}} u_{x_{i_{d-1}}} \Big) \\ \frac{\partial}{\partial x_{i_3}} \Big(\varrho_{i_3,i_1} u_{x_{i_1}} + \varrho_{i_3,i_2} u_{x_{i_2}} + u_{x_{i_3}} + \ldots + \varrho_{i_3,i_{d-1}} u_{x_{i_{d-1}}} \Big) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_{i_{d-1}}} \Big(\varrho_{i_{d-1},i_1} u_{x_{i_1}} + \varrho_{i_{d-1},i_2} u_{x_{i_2}} + \ldots + \varrho_{i_{d-1},i_{d-2}} u_{x_{i_{d-2}}} + u_{x_{i_{d-1}}} \Big) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \Big(u_{x_{i_1} x_{i_1}} + \ldots + u_{x_{i_{d-1}} x_{i_{d-1}}} + 2\varrho_{i_1,i_2} u_{x_{i_1} x_{i_2}} + \ldots + 2\varrho_{i_{d-2},i_{d-1}} u_{x_{i_{d-2}} x_{i_{d-1}}} \Big)$$
$$= \frac{1}{2} \cdot (u_{x_{i_1} x_{i_1}} + \ldots + u_{x_{i_{d-1}} x_{i_{d-1}}}) + \varrho_{i_1,i_2} u_{x_{i_1} x_{i_2}} + \ldots + \varrho_{i_{d-2},i_{d-1}} u_{x_{i_{d-2}} x_{i_{d-1}}}$$

Dies entspricht dann der Gleichung $div(Corr\ \nabla u) = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{d-1} \varrho_{i_j,i_k} u_{x_{i_j}, x_{i_k}}$ mit $\varrho_{i_j i_j} = 1$.

[6] Aus der Vektoranalysis sind die Begriffe des Laplace- und Nabla-Operators sowie der Divergenz bekannt.

Verallgemeinerung der Transformation auf $(d-1)$ räumliche Dimensionen

Der räumlich zwei- und dreidimensionale Fall für Basekt-Optionen lässt sich auf $(d-1)$ räumliche Dimensionen verallgemeinern. Nachstehend wird die verallgemeinerte Formel für die transformierte Advektions-Diffusions-Reaktions-Gleichung angegeben. In dieser Formel verbergen sich der $(d-1)-$dimensionale Laplace-Operator genauso wie der $(d-1)-$dimensionale Gradient zuzüglich aller Kombinationen an Variablen für die gemischten Ableitungen. Gesucht ist eine Lösungfunktion $u(\tau, x_1, \ldots, x_{d-1})$. Für $d = 3, 4$ kann der zwei- bzw. dreidimensionale räumliche Fall wiederentdeckt werden. Dann lautet die Advektions-Diffusions-Reaktions-Gleichung

$$u_\tau + div(Corr\ \nabla u) + \vec{q}\,\nabla u - r\,u = u_\tau + \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{d-1} \varrho_{i_j,i_k} u_{x_{i_j} x_{i_k}} + \sum_{j=1}^{d-1} q_{i_j}\ u_{x_{i_j}} - ru = 0\ u \text{ mit } \varrho_{i_j i_j} = 1.$$

Für den räumlichen zweidimensionalen Fall lautet dann mit $\varrho = \varrho_{i_1,i_2} = \varrho_{i_2,i_1}$ die vollständig formulierte Gleichung

$$L(u)(x,y,\tau) = u_\tau(x,y,\tau) + \frac{1}{2}\Delta u(x,y,\tau) + \varrho\ \partial_{xy} u(x,y,\tau) + \vec{q}\ \nabla u(x,y,\tau) - r\ u(x,y,\tau) = 0. \quad (3.2)$$

Die Transformation hat Auswirkung auf die Gestalt der Anfangs- und Randbedingungen. Die Evaluierung der neu entstandenen Gleichung führt dazu, dass die Endbedingungen der Black-Scholes-Gleichung zur Anfangsbedingung der transformierten Advektions-Diffusions-Reaktions-Gleichung wird. Zum besseren Verständnis der transformierten Anfangs- und Randbedingungen liegt folgende Notation nahe:

$$u(x,y,T) = (\alpha_1 e^{\sigma_1 x} + \alpha_2 e^{\sigma_2 y} - 1)^+ \quad (3.3)$$

$$\lim_{x\to-\infty} u(x,y,\tau) = e^{\sigma_2 y}\Phi(d_1) - e^{-r(T-\tau)}\Phi(d_2) \quad (3.4)$$

$$\lim_{y\to-\infty} u(x,y,\tau) = e^{\sigma_1 x}\Phi(\hat{d}_1) - e^{-r(T-\tau)}\Phi(\hat{d}_2) \quad (3.5)$$

$$\lim_{x\to\infty} (u(x,y,\tau) - \alpha_1 e^{\sigma_1 x}) = e^{-r(T-r)}(\alpha_2 e^{\sigma_2 y} - 1) \quad (3.6)$$

$$\lim_{y\to\infty} (u(x,y,\tau) - \alpha_2 e^{\sigma_2 y}) = e^{-r(T-r)}(\alpha_1 e^{\sigma_1 x} - 1), \quad (3.7)$$

wobei gilt

$$d_{1/2} = \frac{\ln\alpha_2 + \sigma_2 y + (r \pm \frac{\sigma_2^2}{2})(T-\tau_k)}{\sigma_2\sqrt{T-\tau}}$$

$$\hat{d}_{1/2} = \frac{\ln\alpha_1 + \sigma_1 x + (r \pm \frac{\sigma_1^2}{2})(T-\tau)}{\sigma_1\sqrt{T-\tau}}.$$

3.5 Aufstellen des korrespondierenden linearen Gleichungssystems

Für die zweidimensionale transformierte kontinuierliche Differentialgleichung $L(u)(x,y,\tau)$ mit der Lösung u aus (3.2) auf dem Gebiet $[-a,a]^2 \times [0,T]$ stelle w die approximative Lösung zu u dar. Das $a > 0$ sei hinreichend groß gewählt, um die Approximation der Gleichung gewährleisten zu können[7]. Die Diskretisierung der Achsen kann auf folgende Weise festgelegt werden: $x_i = -a + (i-1)\ \Delta x,\ \Delta x = \frac{2a}{n_1},\ \forall\, 1 \le i \le n_1 + 1,\ \Delta y = \frac{2a}{n_2},\ y_j = -a + (j-1)\ \Delta y,$ $\forall\ 1 \le j \le n_2 + 1,\ \Delta\tau = \frac{T}{m},\ \tau_k = (k-1)\Delta\tau\ \forall\ 1 \le k \le m+1,\ n_1, n_2, m \in \mathbb{N}$. Die diskretisierte

[7]Näheres kann den Randwertbetrachtungen auf S.35 entnommen werden.

Gleichung zerfällt in die Differenzenquotienten

$$[\partial_\tau\, w]^{(k)}_{(i,j)} = \frac{w^{(k-1)}_{i,j} - w^{(k)}_{i,j}}{\Delta\tau} \tag{3.8}$$

$$[\Delta\, w]^{(k)}_{(i,j)} = \frac{w^{(k)}_{i+1,j} - 2w^{(k)}_{i,j} + w^{(k)}_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{w^{(k)}_{i,j+1} - 2w^{(k)}_{(i,j)} + w^{(k)}_{i,j-1}}{\Delta y^2} \tag{3.9}$$

$$[\partial_{xy}\, w]^{(k)}_{(i,j)} = \frac{w^{(k)}_{i+1,j+1} - w^{(k)}_{i-1,j+1} - w^{(k)}_{i+1,j-1} + w^{(k)}_{i-1,j-1}}{4\Delta x\Delta y} \tag{3.10}$$

$$\vec{q}\,[\nabla\, w]^{(k)}_{(i,j)} = q_1\frac{(w^{(k)}_{i+1,j} - w^{(k)}_{i-1,j})}{2\Delta x} + q_2\frac{(w^{(k)}_{i,j+1} - w^{(k)}_{i,j-1})}{2\Delta y}. \tag{3.11}$$

Die diskrete Formulierung der zweidimensionalen Differentialgleichung (3.2) unter Verwendung des $\vartheta-$Verfahrens lautet:

$$\begin{aligned}
&[\partial_\tau\, w]^{(k)}_{(i,j)} + \frac{\vartheta}{2}[\Delta\, w]^{(k)}_{(i,j)} + \vartheta\varrho[\partial_{xy}\, w]^{(k)}_{(i,j)} + \vartheta\vec{q}\,[\nabla\, w]^{(k)}_{(i,j)} - \vartheta r[w]^{(k)}_{(i,j)} \\
&= -\frac{(1-\vartheta)}{2}[\Delta\, w]^{(k-1)}_{(i,j)} - (1-\vartheta)\varrho[\partial_{xy}\, w]^{(k-1)}_{(i,j)} - (1-\vartheta)\vec{q}\,[\nabla\, w]^{(k-1)}_{(i,j)} + (1-\vartheta)r[w]^{(k-1)}_{(i,j)}
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Die Verallgemeinerung auf den $(d-1)-$dimensionalen räumlichen Fall führt zu einer additiven Verknüpfung der einzelnen Raumdimensionen bzgl. der Differenzenquotienten mit der Diskretisierungsstrategie $\hat{x}_{i_j} = -a + i_j\Delta\hat{x}_{i_j},\ \Delta\hat{x}_{i_j} = \frac{2a}{n_{i_j}},\ \forall\ 1 \le j \le d-1,\ 2 \le k \le m+1.$ Dann lauten die $(d-1)-$dimensionalen Differenzenquotienten:

$$\begin{aligned}
[\partial^{(d-1)}_\tau\, w]^{(k)}_{(i_1,\dots,i_{d-1})} &= \frac{w^{(k-1)}_{(i_1,\dots,i_{d-1})} - w^{(k)}_{(i_1,\dots,i_{d-1})}}{\Delta\tau} \\
[\Delta^{(d-1)}\, w]^{(k)}_{(i_1,\dots,i_{d-1})} &= \frac{w^{(k)}_{(i_1-1,i_2,\dots,i_{d-1})} - 2w^{(k)}_{(i_1,i_2,\dots,i_{d-1})} + w^{(k)}_{(i_1+1,i_2,\dots,i_{d-1})}}{\Delta\hat{x}^2_{i_1}} \\
&\quad + \ldots + \frac{w^{(k)}_{(i_1,\dots,i_{d-1}-1)} - 2w^{(k)}_{(i_1,\dots,i_{d-1})} + w^{(k)}_{(i_1,\dots,i_{d-1}+1)}}{\Delta\hat{x}^2_{i_{d-1}}} \\
[\partial^{(d-1)}_{\hat{x}_i\hat{x}_j}\, w]^{(k)}_{(i_1,\dots,i_{d-1})} &= \frac{w^{(k)}_{(i_1+1,i_2+1,i_3,\dots,i_{d-1})} - w^{(k)}_{(i_1-1,i_2+1,i_3,\dots,i_{d-1})}}{4\Delta\hat{x}_{i_1}\Delta\hat{x}_{i_2}} \\
&\quad + \frac{w^{(k)}_{(i_1-1,i_2-1,i_3,\dots,i_{d-1})} - w^{(k)}_{(i_1+1,i_2-1,i_3,\dots,i_{d-1})}}{4\Delta\hat{x}_{i_1}\Delta\hat{x}_{i_2}} \\
&\quad + \ldots + \frac{w^{(k)}_{(i_1,\dots,i_{d-3},i_{d-2}+1,i_{d-1}+1)} - w^{(k)}_{(i_1,\dots,i_{d-3},i_{d-2}-1,i_{d-1}+1)}}{4\Delta\hat{x}_{i_{d-2}}\Delta\hat{x}_{i_{d-1}}} \\
&\quad + \frac{w^{(k)}_{(i_1,\dots,i_{d-3},i_{d-2}-1,i_{d-1}-1)} - w^{(k)}_{(i_1,\dots,i_{d-3},i_{d-2}+1,i_{d-1}-1)}}{4\Delta\hat{x}_{i_{d-2}}\Delta\hat{x}_{i_{d-1}}} \\
\vec{q}\,[\nabla^{(d-1)}\, w]^{(k)}_{(i_1,\dots,i_{d-1})} &= q_1\frac{w^{(k)}_{(i_1+1,i_2,\dots,i_{d-1})} - w^{(k)}_{(i_1-1,i_2,\dots,i_{d-1})}}{2\Delta\hat{x}_{i_1}} \\
&\quad + \ldots + q_{d-1}\frac{w^{(k)}_{(i_1,\dots,i_{d-1}+1)} - w^{(k)}_{(i_1,\dots,i_{d-1}-1)}}{2\Delta\hat{x}_{i_{d-1}}}
\end{aligned}$$

In übersichtlicher Form steht, unter der Verwendung der Semi-Diskretisierung bzw. des Crank-Nicolson-Verfahrens mit $\vartheta = \frac{1}{2}$, für die transformierte diskretisierte Basket-Optionsgleichung im zweidimensionalen räumlichen Fall

$$L_h = (L_\Delta + L_{\partial_{xy}}) + L_\nabla - L_r \tag{3.13}$$
$$\frac{\partial w}{\partial \Delta\tau} + L_h w = 0 \tag{3.14}$$
$$\frac{w^{(k-1)} - w^{(k)}}{\Delta\tau} I + \vartheta L_h w^{(k)} + (1-\vartheta) L_h w^{(k-1)} = 0 \tag{3.15}$$
$$\Big(-I + \vartheta \Delta\tau L_h \Big) w^{(k)} + \Big(I + (1-\vartheta)\Delta\tau L_h \Big) w^{(k-1)} = 0, \tag{3.16}$$

wobei sich $L_h \in \mathbb{R}^{z \times z}$ mit $z = (n_1 - 1) \cdot (n_2 - 1)$ aus den Diskretisierungsmatrizen für den Laplace-Operator L_Δ, für den Operator der gemischten Ableitungen $L_{\partial_{xy}}$, den Nabla-Operator L_∇ und für den Zinsoperator L_r ergibt. Dabei stehen $(L_\Delta,\ L_{\partial_{xy}})$ für die Konvektion, L_∇ für die Diffusion und L_r für die Reaktion. Als bekanntes Symbol steht $I \in \mathbb{R}^{z \times z}$ für die Einheitsmatrix.

Für die Approximation der Zeitableitung muss beachtet werden, dass die Gleichung (3.13) von T nach $T - \Delta t$ evaluiert wird, d.h. der Differenzenquotient für die Zeitableitung besitzt folgende Gestalt:

$$\frac{V(S_1, S_2, t)}{\partial t} = \frac{V(S_1, S_2, T) - V(S_1, S_2, T - \Delta t)}{\Delta t} \ \forall\ \Delta t > 0$$

In der diskreten Variante steht aber

$$[\partial_\tau\ w]_{i,j}^{(k-1)} = \frac{w_{i,j}^{(k-1)} - w_{i,j}^{(k)}}{\Delta\tau} \forall\ \Delta\tau > 0,$$

weil die Diskretisierung bei $t = T$ startet und in $t = 0$ endet. Näheres zur Diskretisierung der Basket-Optionen kann Abschnitt 5.4 entnommen werden. Das aufgestellte kompakte lineare Gleichungssystem (3.16) muss noch durch die entsprechenden Randbedingungen ergänzt werden (am Ende dieses Abschnittes). Ohne die Anwendung der Semi-Diskretisierung kann die Stabilität nicht gesichert werden. Die numerische Stabilität darf nicht von Restriktionen bzgl. der Zeit abhängig sein, weil sonst die später hinzutretende *Kombinationstechnik* nicht eingesetzt werden kann. Die Stabilitätbetrachtung ähnelt der aus Abschnitt 2.4, S.19. Es folgt der Stabilitätsnachweis der zu betrachtenden Verfahrensmatrix des diskretisierten Gleichungssystems.

Beweis der Stabilitätseigenschaft:

Ausgehend vom Gleichungssystem (3.16) mit der Semi-Diskretisierung $\vartheta = \frac{1}{2}$, sowie der Abkürzung $G = \Delta\tau L_h$, kann $A = -I + \frac{1}{2}G$ und $B = -\Big(I + \frac{1}{2}G\Big)$ gesetzt werden, das auf das Gleichungssystem $Aw^{(k)} = Bw^{(k-1)}\ \forall\ 2 \le k \le m+1$ führt. Es gilt dann

$$\begin{aligned} Aw^{(k)} = Bw^{(k-1)} &\iff \Big(-I + \frac{1}{2}G \Big) w^{(k)} = \Big(-I - \frac{1}{2}G \Big) w_h^{(k-1)} \\ &\iff \Big(-I + \frac{1}{2}G \Big) w^{(k)} \Big(-2I + I - \frac{1}{2}G \Big) w^{(k-1)} \\ &\iff Aw^{(k)} = (-2I - A) w^{(k-1)}. \end{aligned}$$

Auf beiden Seiten der Gleichung wird mit der Inversen von A, vorausgesetzt es gilt $det(A) \neq 0$, multipliziert, was auf folgende Gleichung führt:

$$w^{(k)} = -(2A^{-1} + I)w^{(k-1)}$$

Kann nun gezeigt werden, dass für den Spektralradius folgendes gilt:

$$\varrho(-2A^{-1} - I) < 1 \;\forall\; \Delta\tau > 0,$$

dann ist das Crank-Nicolson-Verfahren $\forall\ \Delta\tau > 0$ stabil. Dabei sei $-(2A^{-1} + I)$ die Verfahrensmatrix des diskretiserten Problems. Auf S.70 folgt für die Stabilität ein numerisches Rechenbeispiel.

$\square$

Werden die Differenzenquotienten aus (3.8) - (3.11) in Gleichung (3.12) für den zweidimensionalen räumlichen Fall eingesetzt, steht in ausführlicher Form für die diskretisierte Gleichung

$$\begin{aligned}
&-\frac{w_{i,j}^{(k)}}{\Delta\tau} + \frac{\vartheta}{2}\Big(\frac{w_{i+1,j}^{(k)} - 2w_{i,j}^{(k)} + w_{i-1,j}^{(k)}}{\Delta x^2}\Big) + \frac{\vartheta}{2}\Big(\frac{w_{i,j+1}^{(k)} - 2w_{i,j}^{(k)} + w_{i,j-1}^{(k)}}{\Delta y^2}\Big)\\
&+ \vartheta\; q_1\Big(\frac{w_{i+1,j}^{(k)} - w_{i-1,j}^{(k)}}{2\Delta x}\Big) + \vartheta\; q_2\Big(\frac{w_{i,j+1}^{(k)} - w_{i,j-1}^{(k)}}{2\Delta y}\Big)\\
&+ \frac{\varrho\vartheta}{4\Delta x\Delta y}\Big(w_{i+1,j+1}^{(k)} - w_{i-1,j+1}^{(k)} - w_{i+1,j-1}^{(k)} + w_{i-1,j-1}^{(k)}\Big) - r\;\vartheta w_{i,j}^{(k)}\\
=&-\frac{w_{i,j}^{(k-1)}}{\Delta\tau} - \frac{(1-\vartheta)}{2}\Big(\frac{w_{i+1,j}^{(k-1)} - 2w_{i,j}^{(k-1)} + w_{i-1,j}^{(k-1)}}{\Delta x^2}\Big) - \frac{(1-\vartheta)}{2}\Big(\frac{w_{i,j+1}^{(k-1)} - 2w_{i,j}^{(k-1)} + w_{i,j-1}^{(k-1)}}{\Delta y^2}\Big)\\
&-(1-\vartheta)\; q_1\Big(\frac{w_{i+1,j}^{(k-1)} - w_{i-1,j}^{(k-1)}}{2\Delta x}\Big) - (1-\vartheta)\; q_2\Big(\frac{w_{i,j+1}^{(k-1)} - w_{i,j-1}^{(k-1)}}{2\Delta y}\Big)\\
&-\frac{\varrho(1-\vartheta)}{4\Delta x\Delta y}\Big(w_{i+1,j+1}^{(k-1)} - w_{i-1,j+1}^{(k-1)} - w_{i+1,j-1}^{(k-1)} + w_{i-1,j-1}^{(k-1)}\Big) + r\;(1-\vartheta)w_{i,j}^{(k-1)}
\end{aligned}$$

mit $2 \leq k \leq m+1,\ 2 \leq i \leq n_1,\ 2 \leq j \leq n_2$. In kompakter Form kann diese Gleichung für die zweidimensionale PDE über einen Neun-Punkte-Differenzenstern $\forall\ 0 \leq \vartheta \leq 1,\ -1 \leq \varrho \leq 1$

$$\begin{pmatrix}
-\frac{\varrho\vartheta}{4\Delta x\Delta y} & \frac{q_2\vartheta}{2\Delta y} + \frac{\vartheta}{2\Delta y^2} & +\frac{\varrho\vartheta}{4\Delta x\Delta y}\\
-\frac{q_1\vartheta}{2\Delta x} + \frac{\vartheta}{2\Delta x^2} & -\frac{\vartheta}{\Delta x^2} - \frac{\vartheta}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta\tau} - r\vartheta & \frac{q_1\vartheta}{2\Delta x} + \frac{\vartheta}{2\Delta x^2}\\
+\frac{\varrho\vartheta}{4\Delta x\Delta y} & -\frac{q_2\vartheta}{2\Delta y} + \frac{\vartheta}{2\Delta y^2} & -\frac{\varrho\vartheta}{4\Delta x\Delta y}
\end{pmatrix}$$

aufgeschrieben werden.

Randwertbetrachtungen

Zur numerischen Berechnung wird in jeden Zeitschritt ein lineares Gleichungssystem für die unbekannten inneren Werte $w_{i,j}^{(k)},\quad \forall\ 2 \leq k \leq m+1,\quad 2 \leq i \leq n_1,\ \ 2 \leq j \leq n_2$ aufgestellt. Dabei ist die sich aus (3.13) ergebende Matrix unabhängig von der Zeit. Jedoch müssen zu jedem Schritt die Randwertbereiche auf die rechte Seite übertragen werden. Für hinreichend großes $a > 0$ werden Randwerte durch das asymptotische Verhalten bestimmt. Die Verkettung der Randwerte der diskretisierten Laplace- und Nabla-Operatoren mit den inneren Punkten stellt keine Schwierigkeit dar. Bei der Einbindung der Randwerte für die diskretisierten gemischten Ableitungen muss die Einarbeitung der vier Ecken beachtet werden. Dies sieht dann wie folgt aus:

1. Verkettung der Randwerte für die gemischten Ableitungen mit dem inneren Gebiet.

$$\left(L_{\partial_{xy}} w\right)_{i,j}^{(k)} = \frac{\varrho}{4\Delta x \Delta y}\left(w_{i+1,j+1}^{(k)} - w_{i-1,j+1}^{(k)} + w_{i-1,j-1}^{(k)} - w_{i+1,j-1}^{(k)}\right) = f_{i,j}^{(k)} = 0 \qquad (3.17)$$

$\forall\ 2 \leq k \leq m+1$. Für geeignete $2 \leq i \leq n_1,\ 2 \leq j \leq n_2$ sind die Randwerte auf die rechte Seite zu bringen. Die Randwerte ergeben sich durch Einsetzen in (3.4) - (3.7). Für hinreichend großes $a \in \mathbb{R}$ ist die Wahl zwischen den beiden zur Verfügung stehenden Randwertfunktion in den Eckpunkten beliebig. Dies soll beispielhaft aus der Abbildung 3.1 für den linken unteren Eckpunkt erklärt werden. So ist für $x = -a$ und $y = -a$ die Wahl von (3.4) oder (3.5) möglich. Betrachtet man die gewählte Diskretisierung, bietet sich für die künstlich eingeführten Ränder folgende sinnvolle Notation an:

a) Mit $\Theta_{i,j,k}^{links}$ $i = 1,\ \forall\ 2 \leq k \leq m+1,\ 1 \leq j \leq n_2+1$, bezeichne man den linken Rand. Dabei wurde auf die Formel aus (3.4) zurückgegriffen

$$\Theta_{1,j,k}^{links} = e^{\sigma_2 y_j}\Phi(d_1) - e^{-r(T-\tau_k)}\Phi(d_2)$$

mit

$$d_{1/2} = \frac{\ln\alpha_2 + \sigma_2 y_j + (r \pm \frac{\sigma_2^2}{2})(T-\tau_k)}{\sigma_2\sqrt{T-\tau_k}}.$$

b) Genauso geht man bei dem unteren Rand vor, der durch $\Theta_{i,j,k}^{unten}$ $\forall\ 2 \leq k \leq m+1,\ j = 1$, $1 \leq i \leq n_1+1$ bezeichnet wird. Die Formel (3.5) für die diskrete Variante aufgeschrieben lautet

$$\Theta_{i,1,k}^{unten} = e^{\sigma_1 x_i}\Phi(\hat{d}_1) - e^{-r(T-\tau_k)}\Phi(\hat{d}_2)$$

mit

$$\hat{d}_{1/2} = \frac{\ln\alpha_1 + \sigma_1 x_i + (r \pm \frac{\sigma_1^2}{2})(T-\tau_k)}{\sigma_1\sqrt{T-\tau_k}}.$$

c) Analog geht man bei dem rechten Rand $\Theta_{i,j,k}^{rechts}$ $\forall\ 2 \leq k \leq m+1,\ 1 \leq j \leq n_2+1$, $i = n_1+1$, vor, wobei man die Formel (3.6) verwendet. Dann lautet der diskretisierte rechte Rand

$$\Theta_{n_1+1,j,k}^{rechts} = \alpha_1 e^{\sigma_1 x_{n_1+1}} + e^{-r(T-\tau_k)}(\alpha_2 e^{\sigma_2 y_j} - 1).$$

d) In der selben Art verfährt man bei dem oberen Rand $\Theta_{i,j,k}^{oben}$ $\forall\ 2 \leq k \leq m+1,\ j = n_2+1$, $1 \leq i \leq n_1+1$. Mit der Formel (3.7) gelangt man dann zu

$$\Theta_{i,n_2+1,k}^{oben} = \alpha_2 e^{\sigma_2 y_{n_2+1}} + e^{-r(T-\tau_k)}(\alpha_1 e^{\sigma_1 x_i} - 1).$$

Bei einer Parameterbelegung von $a = 4$ ist die Wahl der Randwertfunktion in einem Eckpunkt egal. Für die Abbildung 3.1 wurde die betragsmäßige Differenz für den linken unteren Eckpunkt mit den Randwertfunktionen $\Theta_{1,1,k}^{links}$ und $\Theta_{1,1,k}^{unten}$ bestimmt. Die Belegung der beteiligten Parameter für diese Abbildung entstammt dem Standardbeispiel 5.1, S.69. Für die übrig bleibenden drei Ecken ist das Vorgehen analog.

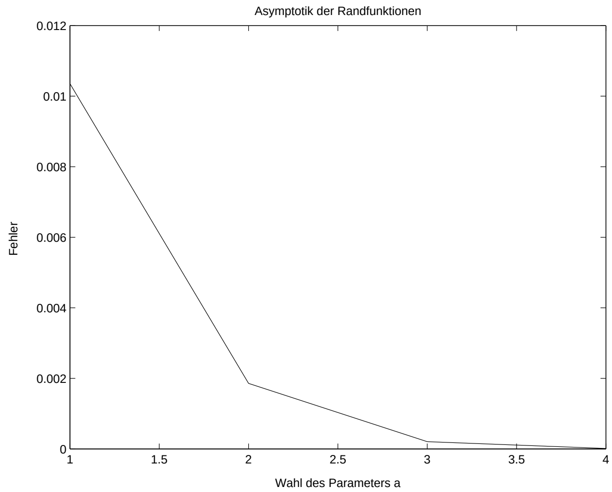

Abbildung 3.1: Die Wahl von $\Theta^{links}_{1,1,k}$ oder $\Theta^{unten}_{1,1,k}$ für die linke untere Ecke, ist ab $a = 4$ egal.

Die Behandlung der Ecken mit dem diskreten Operator für die gemischten Ableitungen sieht dann folgendermaßen aus:

a) **linke untere Ecke:**

$$\Big(L_{\partial_{xy}} w\Big)^{(k)}_{2,2} = \frac{\varrho\; w^{(k)}_{3,3}}{4\Delta x \Delta y} = \frac{\varrho}{4\Delta x \Delta y}(\Theta^{links}_{3,1,k} + \Theta^{unten}_{1,1,k} - \Theta^{links}_{1,2,k})$$

b) **rechte untere Ecke:**

$$\Big(L_{\partial_{xy}} w\Big)^{(k)}_{n_2,2} = -\frac{\varrho\; w^{(k)}_{n_2+1,3}}{4\Delta x \Delta y} = \frac{\varrho}{4\Delta x \Delta y}\Big(\Theta^{rechts}_{3,n_2+1} + \Theta^{rechts}_{1,n_2+1,k} - \Theta^{unten}_{1,n_2-1,k}\Big)$$

c) **linke obere Ecke:**

$$\Big(L_{\partial_{xy}} w\Big)^{(k)}_{2,n_1} = -\frac{\varrho\; w^{(k)}_{3,n_1-1}}{4\Delta x \Delta y} = \frac{\varrho}{4\Delta x \Delta y}\Big(\Theta^{unten}_{n_1+1,3,k} + \Theta^{unten}_{n_1+1,2,k} - \Theta^{unten}_{n_1-1,1,k}\Big)$$

d) **rechte obere Ecke:**

$$\Big(L_{\partial_{xy}} w\Big)^{(k)}_{n_2,n_1} = \frac{\varrho\; w^{(k)}_{n_2-1,n_1-1}}{4\Delta x \Delta y} = \frac{\varrho}{4\Delta x \Delta y}\Big(\Theta^{oben}_{n_1+1,n_2+1,k} + \Theta^{oben}_{n_1+1,n_2-1,k} - \Theta^{rechts}_{n_1-1,n_2+1,k}\Big).$$

2. Verkettung der Randwerte des Laplace-Operators mit dem inneren Gebiet

$$\Big(L_{\Delta} w\Big)^{(k)}_{i,j} = \frac{1}{\Delta x^2}\Big(w^{(k)}_{i-1,j} + w^{(k)}_{i+1,j} - 2w^{(k)}_{i,j}\Big) + \frac{1}{\Delta y^2}\Big(w^{(k)}_{i,j-1} + w^{(k)}_{i,j+1} - 2w^{(k)}_{i,j}\Big) = f^{(k)}_{i,j} = 0 \quad (3.18)$$

$\forall\ 2 \le k \le m+1$. Für geeignete $2 \le i \le n_1,\ 2 \le j \le n_2$ sind die Randwerte auf die rechte Seite zu bringen. Das Schema folgt dem der gemischten Ableitungen.

3. Verkettung der Randwerte des Nabla-Operators mit dem inneren Gebiet

$$(L_{\nabla} w)^{(k)}_{i,j} = \frac{q_1}{2\Delta x}\Big(w^{(k)}_{i+1,j} - w^{(k)}_{i-1,j}\Big) + \frac{q_2}{2\Delta y}\Big(w^{(k)}_{i,j+1} - w^{(k)}_{i,j-1}\Big) = f^{(k)}_{i,j} = 0 \quad (3.19)$$

$\forall\ 2 \le k \le m+1$. Für geeignete $2 \le i \le n_1,\ 2 \le j \le n_2$ müssen die Randwerte auf die rechte Seite übertragen werden. Das Schema folgt dem der gemischten Ableitungen.

4 Die Kombinationstechnik

4.1 Grundsätzliches über die Kombinationstechnik

Beim Bewerten von Finanzderivaten treffen mathematisch-spezialisierte Banker in letzter Zeit immer häufiger auf folgende Aufgabenstellung: Man möchte ein Finanzgeschäft für verschiedene Kurse und Zeitpunkte bewerten. Dabei wird das finanzmathematische Modell durch ein System von partiellen Differentialgleichungen beschrieben. Für dieses Modell existiert keine geschlossene Lösungsformel. Deshalb muss die Lösung numerisch berechnet werden.

Zur numerischen Behandlung wird die Differentialgleichung auf einem anisotropen kartesischen Gitter diskretisiert und in algebraische Gleichungssysteme überführt, die auf einem Computer gelöst werden können. Diese resultierenden Gleichungssysteme werden aber bei zunehmender Verfeinerung der Gittermaschenweite zur Erhöhung der Rechengenauigkeit schnell sehr groß und belasten die zur Verfügung stehenden Ressourcen des Computers erheblich. Selbst das schnelle Ansteigen der Computerleistung bzgl. der Rechenkapazität und -geschwindigkeit vermag dann nur ungenügend den großen Datenmengen Herr zu werden. In der einschlägigen Fachliteratur wird diese Erkenntnis unter dem Problem des "Fluchs der Dimensionen" subsumiert und bedeutet, dass der numerische Aufwand mit zunehmender Dimension d exponentiell wächst und die Dimension des linearen Gleichungssystems aufbläht. Anstatt dann die Algorithmen zu beschleunigen, kann versucht werden, den numerischen Berechnungsaufwand unterhalb eines exponentiellen Aufwands bei steigender Problemdimension substantiell zu reduzieren, ohne dass die Lösungsqualität signifikant beeinträchtigt wird.

Eine Möglichkeit zum effizienteren und speichersparenden Ressourcenmanagement von Datenbeständen "bietet neben der Erhöhung der Approximationsordnung und der adaptiven Gitterverfeinerung die auf der Idee der Dünngitter basierende *Kombinationstechnik*."[1] Nicht auf einem einzelnen, feinen Diskretisierungsgitter, dem Vollgitter, wird die Problemlösung berechnet, sondern auf mehreren, gröberen anisotropen Gittern mit unterschiedlichen Gittermaschenweiten in den einzelnen Achsenrichtungen. Die gewählte Gittermaschenweite für jede Achsenrichtung bleibt dabei konstant. Bei der *Kombinationstechnik* wird eine Dünngitter-Lösung aus Finiten Differenzen-Lösungen auf einer Familie anisotroper kartesischer Gitter extrapoliert. Eine geeignete Linearkombination der Grobgitterlösungen führt auf die Kombinationslösung. Die Summe der zu berechnenden Unbekannten des algebraischen Gleichungssystems aller Grobgitter ist dabei wesentlich kleiner als die Anzahl der Unbekannten auf dem wesentlich feineren Referenzgitter (isotropes sehr feines Vollgitter). Damit bietet die *Kombinationstechnik* eine Möglichkeit, den Rechenaufwand zur Lösung eines Problems wesentlich zu reduzieren.

In diesem Kapitel wurde hauptsächlich mit den Quellen [Bun92] und [Kranz02] gearbeitet.

[1] [Dorn97] S.2 Mitte.

4.2 Theorie der Kombinationstechnik

4.2.1 Dünngitter

Die *Kombinationstechnik* geht aus der Theorie der Dünngitter hervor. Dabei beruht die Dünngitter-Theorie auf einer Funktionsdarstellung mit hierarchischen Basisfunktionen. Durch diese gewählte Basisdarstellung kann die Problemdimension spürbar reduziert werden, ohne dass der Informationsgehalt der erhaltenen Lösung an Qualität einbüßt.

Es sei $l = (l_1, \ldots, l_d) \in \mathbb{N}_0^d$ ein Multiindex und $\Omega_l^{(\infty)}$ das rechtwinklige (Voll-)Gitter im Einheitsquadrat $\bar{\Omega} = [0,1]^d$ mit Maschenweiten $h_l := (h_{l_1}, \ldots, h_{l_d}) = (2^{-l_1} \ldots, 2^{-l_d})$ in die unterschiedlichen Richtungen. Dabei wird l_j als Gitterlevel in Richtung j bezeichnet. Die Gitterpunkte des Gitters $\Omega_l^{(\infty)}$ werden mit $x_{l,i}$ mit dem Multiindex $i = (i_1, \ldots, i_d)$ bezeichnet. Für die inneren Gitterpunkte $x_{l,i}$ des Gitters $\Omega_l^{(\infty)}$ gilt $\forall\ 2 \leq i_j \leq n_j - 1$ für den Multiindex i.

$$x_{l,i} := (x_{l_1,i_1}, \ldots, x_{l_d,i_d}),\ x_{l_j,i_j} = i_j h_{l_j} = i_j 2^{-l_j},\ i_j = 0, \ldots, 2^{l_j},\ \forall\ j = 1, \ldots, d.$$

Es folgt die wichtige Begriffserklärung der Glattheit, die in den folgenden Abschnitten eine gesonderte Rolle einnehmen wird. Die folgende Definition gibt an, was in unserem Kontext unter Glattheit verstanden werden soll.

DEFINITION 4.1 (Glattheit). *Eine Funktion $u : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ mit $d \in \mathbb{N}$ Veränderlichen heißt glatt, wenn für diese Funktion die partiellen Ableitungen $\frac{\partial^{2d} u(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_1^2 \ldots \partial x_n^2}$ auf $\bar{\Omega}$ existieren und stetig sind.*

Bemerkung 4.1. Die oben stehende Definition folgt dem Vorschlag von [Bun92] auf S.6. Es erfolgt noch einmal der ausdrückliche Hinweis, dass die theoretischen Betrachtungen ausschließlich nur für glatte Funktionen erfolgt sind. Diese Arbeit behandelt im praktischen Teil Funktionen mit einem "Knick". Aus finanztechnischer Sicht kommt an diesen "Knick" die Option ins Geld. Mathematisch gesehen ist die Option an dieser Stelle stetig, aber nicht differenzierbar. Durch Experimente kann empirisch gezeigt werden, dass die von mir behandelten "Knickfunktionen" von Optionen trotzdem mit der Dünngitter-Theorie in Einklang stehen. Hierfür sei auf das fünfte Kapitel verwiesen.

DEFINITION 4.2. *Die Gesamtheit aller glatten Funktionen im Sinne von Def. 4.1 bezeichnen wir mit $X(\bar{\Omega})$*

$$X(\bar{\Omega}) := \Big\{ u : \bar{\Omega} \to \mathbb{R},\ \frac{\partial^{2d} u}{\partial x_1^2 \ldots \partial x_d^2} \in C^0(\bar{\Omega}) \Big\}.$$

Diese Definition sichert die spätere Beschränkung der betrachteten Norm der kontinuierlichen Funktion u ab und wird benötigt, um die Effizienzaussagen der Dünngitter-Theorie beweisen zu können. Es sei $X_0(\bar{\Omega})$ die Menge der Funktionen $u \in X(\bar{\Omega})$, die auf dem Rand verschwinden. Formal lautet die Mengendefinition dann[2]:

$$X_0(\bar{\Omega}) = \{ u \in X(\bar{\Omega}) :\ u|_{\partial\bar{\Omega}} = 0 \} \tag{4.1}$$

Die von uns betrachteten kontinuierlichen Funktionen müssen zur numerischen Analyse auf dem Computer abgebildet werden. Die gängige Strategie hierfür ist die Diskretisierung der

[2] [Kranz02] S.11

gesuchten kontinuierlichen Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}$, d.h. die Auswertung an Stützstellen x_j mit $x_{j-1} < x_j \ \forall\ j = 0, \ldots, m,\ x_0 = 0,\ x_m = 1$. Dies kann auf einem gleich- oder ungleichmaschigen anisotropen Gitter $\Omega_h = \{x_j \in \Omega,\ \forall\ j = 0, \ldots, m\}$ vorgenommen werden. Die Rekonstruktion des kontinuierlichen Funktionenverlaufes wird dann durch ein geeignetes Interpolationsverfahren vorgenommen, wobei die Interpolationsfunktion die Bedingung $u^I(x_j) = u(x_j) =: u_j \ \forall\ j = 0, \ldots, m$ erfüllt. Um uns die Interpolation zu vergegenwärtigen, rekapitulieren wir den ein- und mehrdimensionalen Fall der Interpolationsaufgabe.

Im eindimensionalen Fall betrachten wir das offene Intervall $\Omega =]0, 1[$ bzw. das abgeschlossene Intervall $\bar{\Omega} = [0, 1]$. Die kontinuierliche Funktion $u : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ soll im Rechner dargestellt werden. An den Stützstellen x_j der diskreten Version wird $u(x_j),\ x_j \in \bar{\Omega},\ 0 \le j \le m$ direkt ausgewertet mit einer Anordnung für die Stützstellen von $x_{j-1} < x_j,\ \forall\, 1 \le j \le m$, $x_1 = 0,\ x_m = 1$. Entweder wird auf einem ungleich- oder gleichmäßigen eindimensionalen Gitter $\bar{\Omega}_h = \{x_j \in \bar{\Omega},\ 0 \le j \le m\}$ operiert. Die näherungsweise Darstellung des kontinuierlichen Kurvenverlaufes geschieht über die Rekonstruktion der Funktion durch die angesetzte Interpolation $u_j := u^I(x_j) = u(x_j),\ \forall\, 0 \le j \le m$. Es sei Φ_j die Funktion auf $\bar{\Omega}$, die zwischen benachbarten Gitterpunkten $x_{j-1},\ x_j$ linear ist und $\Phi_j(x_i) = \delta_{ij},\ \forall\ 0 \le i \le m$ erfüllt. Die Menge $\{\Phi_0, \ldots, \Phi_m\}$ bildet die sogenannte Knotenbasis des Raums der stückweise linearen Funktionen auf $\bar{\Omega}$ bzgl. des Gitters $\bar{\Omega}_h$. Die stückweise lineare Interpolante ist dann

$$u^I(x) = \sum_{j=0}^{m} u_j \Phi_j(x) \text{ mit } u_j = u(x_j). \tag{4.2}$$

Die Funktionen Φ_j werden auch als Hütchenfunktionen bezeichnet. Für den mehr- bzw. d-dimensionalen Funktionenraum benötigen wir stückweise multilineare Basisfunktionen. Über das Tensorprodukt wird die mehrdimensionale Basisfunktion aus eindimensionalen, stückweise linearen Funktionen erklärt. Wir nehmen den Level $l = (l_1, \ldots, l_d)$, der durch $h_l = 2^{-l}$ eindeutig die Maschenweiten und dadurch das Gitter $\Omega_l^{(\infty)}$ in $\bar{\Omega} = [0, 1]^d$ bestimmt, in die Notation mit auf. In mathematischer Ausführung heißt dies

$$\begin{aligned} \Phi_{l,i}(x) &:= \Big(\Phi_{l_1,i_1} \ \otimes\ \Phi_{l_2,i_2} \ \otimes\ \ldots\ \otimes\ \Phi_{l_d,i_d}\Big)(x_1, x_2, \ldots, x_d) \\ &= \Phi_{l_1,i_1}(x_1)\ \Phi_{l_2,i_2}(x_2)\ \ldots\ \Phi_{l_d,i_d}(x_d) = \prod_{j=1}^{d} \Phi_{l_j,i_j}(x_j). \end{aligned}$$

In den verschiedenen Koordinatenrichtungen des anisotropen Gitters $\Omega_l^{(\infty)}$ gibt es in der Regel unterschiedliche, aber in jeder einzelnen Koordinatenrichtung gleiche Maschenweiten. Für die inneren Gitterpunkte von $\Omega_l^{(\infty)}$ definiert man genau solche $d-$dimensionalen Basisfunktionen $\Phi_{l,i}$ als Tensorprodukte[3] eindimensionaler Standard-Hütchenfunktionen. Die Hütchenbasis bzw. Knotenbasis auf einem speziellen Gitter lautet dann

$$\Phi_{l_j,i_j}(x_j) := \begin{cases} 1 - \left|\frac{x_j - i_j h_{l_j}}{h_{l_j}}\right|, & x_j \in\ [(i_j-1)h_{l_j}, (i_j+1)h_{l_j}] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \tag{4.3}$$

mit dem Träger $\operatorname{supp}(\Phi_{l_j,i_j}) = [x_{l_j,i_j} - h_{l_j}, x_{l_j,i_j} + h_{l_j}]$.

DEFINITION 4.3. *Die $d-$dimensionalen Basisfunktionen $\Phi_{l,i}$ spannen den Funktionenraum V_l der stückweise multilinearen Funktionen bzgl. der inneren Gitterpunkte von $\Omega_l^{(\infty)}$ auf[4]:*

$$V_l := span\{\Phi_{l,i} :\ l_j > 0,\ i_j = 1, \ldots, 2^{l_j} - 1,\ j = 1, \ldots, d\}.$$

[3] [Kranz02] auf S.11 oder [Zum00] auf S.3
[4] [Kranz02] auf S.11

Die Räume sind geschachtelt, d.h. $V_l \subseteq V_k$ für $l_j \leq k_j \ \forall \ j = 1, \ldots, d$. Dies ist leicht einsichtig, weil über die Basis von V_k der Raum V_l dargestellt werden kann. Insbesondere sind die Basisfunktionen von V_l durch solche aus V_n darstellbar. Z. B. ist

$$\Phi_{1,1} = \frac{1}{2}\Phi_{2,1} + \Phi_{2,2} + \frac{1}{2}\Phi_{2,3}.$$

Dies geht aus der Abbildung 4.1 hervor. Eine alternative Basisdarstellung für denselben Funktionenraum bietet die hierarchische Basis. Die Abbildung 4.1 verdeutlicht den Unterschied zwischen nodaler und hierarchischer Basis. Die nodale Basis (Knotenbasis) wird für jeden Level l einzeln aufgestellt. Dagegen setzt sich die hierarchische Basis aus bestimmten nodalen Basisfunktionen der einzelnen Hierarchieebenen zusammen. Mit jedem neuen Level werden die Basisfunktionen mit ungeradem Index hinzugefügt, die zu den Punkten gehören, die nicht in einem der gröberen Gitter enthalten sind. Auch dies ist aus der Abbildung 4.1 ersichtlich.

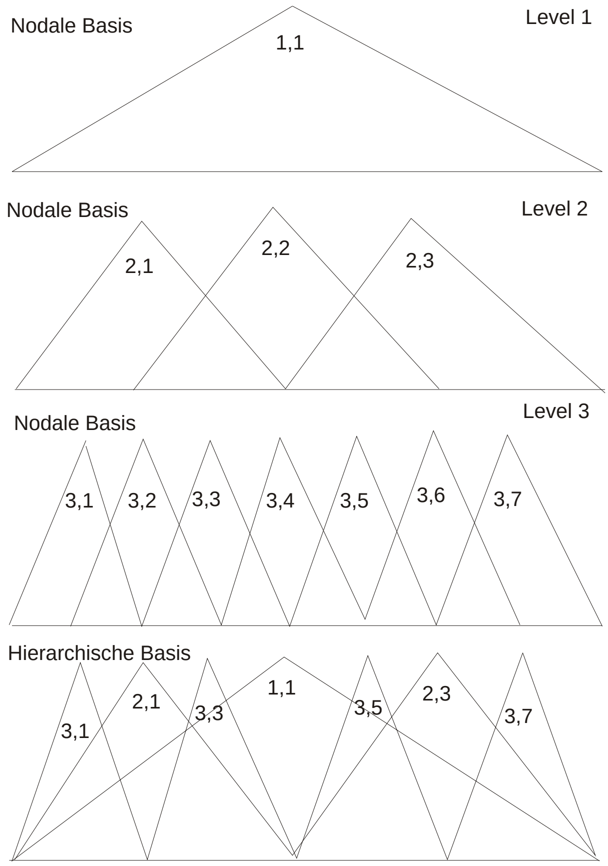

Abbildung 4.1: Beispiel für die hierarchische und nodale Basisdarstellung

Die Interpolation einer kontinuierlichen Funktion zu einer hierarchischen Basis erscheint zweckmäßiger, da auf bestimmte Basisfunktionen der hierarchischen Basis verzichtet werden kann, ohne dass dadurch die Rekonstruktion der kontinuierlichen Funktion Schaden nimmt. Die Darstellung über eine hierarchische Basis glättet die Interpolation. Wird dagegen der Funktionenraum über eine nodale Basis beschrieben, kann nicht ohne weiteres eine Basisfunktion aus der nodalen Basis entfernt werden. Dafür ist der Beitrag jeder einzelnen nodalen Basis für den Gesamtinterpolanten zu groß. Die Abbildung 4.2 gibt genau die vorangegangene Aussage wieder. Auf dem linken Bild ist die Interpolation zu einer nodalen

Basis gegeben. Die Abstände zwischen der Abszisse und der Funktion in einer Stützstelle $x_j \; \forall \; j = 0, \ldots, 8$ geben die Länge bzw. Beträge des $j-$ten Koeffizienten der $j-$ten nodalen Basis Φ_j an. Im Vergleich dazu sind die Abstände der $j-$ten Koeffizienten der hierarchischen Basis im rechten Bild wesentlich kleiner.

Der $d-$dimensionale Vollgitterraum $V_n^{(\infty)}$ wird von der Hütchen- bzw. Knotenbasis über dem feinsten (Voll-)Gitter aufgespannt. Der Index (∞) steht für die diskrete $L^\infty-$Norm, $|l|_\infty = \max\limits_{1\leq j\leq d} l_j$. Dieser Vollgitterraum enthält somit alle kleineren Vollgitterräume. Deshalb kann für den Vollgitterraum zur feinsten Zerlegung auch geschrieben werden:

$$V_n^{(\infty)} = \sum_{|l|_\infty \leq n} V_{(l_1,\ldots,l_d)} = V_{(n,\ldots,n)}.$$

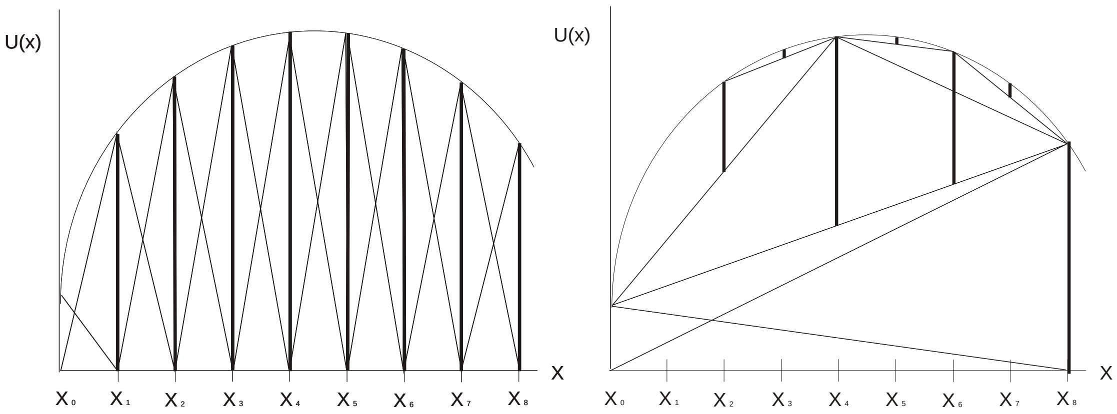

Abbildung 4.2: Interpolation mit einer nodalen Basis (links) und mit einer hierarchischen Basis (rechts).

Um zu einer hierarchischen Teilraumzerlegung des Vollgitters $\Omega_l^{(\infty)}$ zu gelangen, definiert man sich die folgende Multiindexmenge I_l :

DEFINITION 4.4.

$$I_l := \{(i_1, \ldots, i_d) : \; i_j = 1, \ldots, 2^{l_j}, \; i_j \textit{ ungerade}, \; \forall \; j = 1, \ldots, d\}$$

Vergegenwärtigt man sich die Abbildung 4.1, wird verständlich, warum für die hierarchische Teilraumzerlegung die Indexmenge eingeführt wurde. Mit dieser Definition können die Teilräume W_l des Funktionenraumes $V_n^{(1)}$ unter einer hierarchischen Basisdarstellung motiviert werden. Der Index 1 steht für die diskrete L^1-Norm.

DEFINITION 4.5. *Die Teilräume W_l des Dünngitterraums $V_n^{(1)}$ unter einer hierarchischen Basisdarstellung zu dem Multiindex l besitzt folgende Gestalt:*

$$W_l := \textit{span}\{\Phi_{l,i} : l_j > 0, \; i \in I_l, \; j = 1, \ldots, d\}$$

Der Dünngitterraum $V_n^{(1)}$ unter einer hierarchischen Basisdarstellung sei dann definiert über

$$V_n^{(1)} = \bigoplus_{|l|_1 \leq n+d-1} W_l. \tag{4.4}$$

Aus der Konstruktion ist klar, dass die Zerlegung (4.4) tatsächlich eine direkte Summe ist. Jedes $u_n^{(\infty)} \in V_n^{(\infty)}$ lässt sich nun eindeutig mit Hilfe der hierarchischen Teilraumzerlegung und dem Beitrag $u_l \in W_l$ zum Interpolanten $u_n^{(\infty)}$ des Vollgitterraums zur kontinuierlichen Funktion $u \in X(\Omega)$ darstellen:

$$V_n^{(\infty)} = \bigoplus_{|l|_\infty \leq n} W_l \tag{4.5}$$

$$u_n^{(\infty)}(x) = \sum_{|l|_\infty \leq n} u_l(x) \quad \text{mit} \quad u_l(x) = \sum_{i \in I_l} v_{l,i}\Phi_{l,i}(x) \tag{4.6}$$

Die Koeffizienten $v_{l,i}$ sind die hierarchischen Überschüsse. Die Vereinigung aller W_l ergibt denselben Funktionenraum V_l. Durch die Definition 4.4 gilt die Verschachtelung der Räume $W_l \subset W_k \; \forall \; l_j \leq k_j, \; \forall 1 \leq j \leq d$ *nicht* mehr.

4.2.2 Prinzip der Kombinationstechnik

Zunächst erfolgt in einer Zusammenstellung die Bezeichnungsnomenklatur der *Kombinationstechnik*:

- Der von uns betrachtete Funktionenraum $V_n^{(1)}$ wurde in (4.4) definiert. Die Stützstellen aller Basisfunktionen dieses Funktionenraumes bilden ein Dünngitter, das mit $\Omega_l^{(1)}$ bezeichnet wird.

- Das äquidistante rechtwinklige Vollgitter auf dem Gebiet $\bar{\Omega} = [-a, a]^d, \; a > 0$ mit Gittermaschenweite $h_l := (h_{l_1}, \ldots, h_{l_d}) = (2^{-l_1}, \ldots, 2^{-l_d}), \; l_j \in \mathbb{N}_0 \; \forall \; j = 1, \ldots, d$ bezeichnet man mit $\Omega_l^{(\infty)}$.

- Der Raum, der durch die $d-$dimensionalen, stückweise multilinearen Basisfunktionen bzgl. der Gitterpunkte von $\Omega_l^{(\infty)}$ aufgespannt wird, soll mit $\hat{V}_l$ bezeichnet werden. Dabei sind auch die Basisfunktionen der Ränder mit enthalten, da die transformierte Black-Scholes-Gleichung mit Randwerten versehen ist. Im $\hat{V}_l$ kommt für jeden Randpunkt eine Basisfunktion hinzu.

- Eine Funktion $u_l \in V_l$ ist eine auf dem Vollgitter $\Omega_l^{(\infty)}$ gegebene oder berechnete Funktion. Bei europäischen Optionen existiert eine geschlossene Lösungsformel. Bei amerikanischen Optionen und Basket-Optionen kann nur eine Näherungslösung einer partiellen Differentialgleichung angegeben werden, weil keine geschlossenen Lösungsfunktionen existieren.

- Das regelmäßige Vollgitter wird definiert durch $\Omega_n^{(\infty)} = \Omega_{(n,\ldots,n)}^{(\infty)}$. Der zugehörige Funktionenraum ist $\hat{V}_n := \hat{V}_{(n,\ldots,n)}$. Eine auf dem Gitter $\Omega_n^{(\infty)}$ gegebene Funktion ist $u_n \in \hat{V}_n$.

Der weitere Teilabschnitt baut auf der Literaturquelle [Grie04] S.1-8 auf.

DEFINITION 4.6 (Interpolant)**.** *Der Interpolant einer kontinuierlichen zweidimensionalen Funktion $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ besitzt folgende Gestalt:*

$$\hat{u}_{n,n}^I = \sum_{s=1}^{n} \sum_{t=1}^{n-s+1} u_{s,t}.$$

DEFINITION 4.7 (Kombinationsformel im zweidimensionalen Raum). *Die Kombinationslösung u_n^C im zweidimensionalen Raum wird durch folgende geeignete Linearkombination von Lösungen auf verschiedenen gröberen, stark anisotropen regulären Gittern berechnet:*

$$\hat{u}_{n,n}^C = \sum_{l_1+l_2=n+1} u_{l_1,l_2} - \sum_{l_1+l_2=n} u_{l_1,l_2}$$

Bemerkung 4.2. Die Kombinationsformel zur Bildung der Linearkombination, formuliert für den zweidimensionalen Fall, wird für die amerikanischen und europäischen Optionen benötigt. Der drei- und vierdimensionale Fall der Kombinationsformel wird seine Verwendung bei den Basket-Optionen finden. Für den dreidimensionalen Raum lautet die Kombinationsformel

$$u_{(n,n,n)}^C = \sum_{l_1+l_2+l_3=n+2} u_l - 2 \sum_{l_1+l_2+l_3=n+1} u_l + \sum_{l_1+l_2+l_3=n} u_l$$

und für den vierdimensionalen Raum

$$u_{(n,n,n,n)}^C = \sum_{|l|_1=n+3} u_l - 3 \sum_{|l|_1=n+2} u_l + 3 \sum_{|l|_1=n+1} u_l - \sum_{|l|_1=n} u_l.$$

Im allgemeinen Fall besitzt die Kombinationsformel folgende Gestalt:

$$u_{(n,\dots,n)}^C = \sum_{j=0}^{d-1} (-1)^j \binom{d-1}{j} \sum_{|l|_1=n+d-1-j} u_l.$$

LEMMA 4.1. *Der Interpolant $\hat{u}_{n,n}^I$ aus Definition 4.6 und die Kombinationsformel aus Definition 4.7 für den zweidimensionalen Raum mit den Interpolanten $u_{i,j}^I = \sum_{s=1}^{i} \sum_{t=1}^{j} u_{s,t}$ führen zum selben Ziel, d.h.*

$$\hat{u}_{n,n}^I = \sum_{s=1}^{n} \sum_{t=1}^{n-s+1} u_{s,t} = \sum_{i+j=n+1} u_{i,j}^I - \sum_{i+j=n} u_{i,j}^I.$$

Bemerkung 4.3. Das Lemma 4.1 bestätigt die Kombinationsformel im zweidimensionalen Raum aus Definition 4.7.

Beweis von Lemma 4.1:

Es muss $\sum_{s=1}^{n} \sum_{t=1}^{n-s+1} u_{s,t}$ und $\sum_{i+j=n+1} u_{i,j}^I - \sum_{i+j=n} u_{i,j}^I$ mit $u_{i,j}^I = \sum_{s=1}^{i} \sum_{t=1}^{j} u_{s,t}$ gleichgesetzet werden. Den Interpolanten $u_{i,j}^I$ eingesetzt in die Summenformel $\sum_{i+j=n+1} u_{i,j}^I - \sum_{i+j=n} u_{i,j}^I$ ergibt die dreifache Summe

$$\underbrace{\sum_{i+j=n+1} \sum_{s=1}^{i} \sum_{t=1}^{j} u_{s,t}}_{\text{Hauptsumme 1}} - \underbrace{\sum_{i+j=n} \sum_{s=1}^{i} \sum_{t=1}^{j} u_{s,t}}_{\text{Hauptsumme 2}} .$$

$$\begin{aligned}
i=1,\ j=n \quad & \sum_{s=1}^{1}\sum_{t=1}^{n} u_{s,t} = u_{1,1}+\ldots+u_{1,n-1}+u_{1,n} \\
i=2,\ j=n-1 \quad & \sum_{s=1}^{2}\sum_{t=1}^{n-1} u_{s,t} = u_{1,1}+\ldots+u_{1,n-2}+u_{1,n-1}+u_{2,1}+\ldots+u_{2,n-2}+u_{2,n-1} \\
i=3,\ j=n-2 \quad & \sum_{s=1}^{3}\sum_{t=1}^{n-2} u_{s,t} = u_{1,1}+\ldots+u_{1,n-3}+u_{1,n-2}+u_{2,1}+\ldots+u_{2,n-2}+\ldots+u_{3,n-2} \\
& \vdots \\
\imath=n-1,\ j=2 \quad & \sum_{s=1}^{n-1}\sum_{t=1}^{2} u_{s,t} = u_{1,1}+u_{1,2}+u_{2,1}+u_{2,2}+\ldots+u_{n-1,1}+u_{n-1,2} \\
i=n,\ j=1 \quad & \sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{1} u_{s,t} = u_{1,1}+u_{2,1}+u_{3,1}+u_{4,1}+\ldots+u_{n-1,1}+u_{n,1}.
\end{aligned}$$

Das Aufaddieren aller n Summanden für $i+j=n+1$ bildet die Hauptsumme 1.

$$\begin{aligned}
i=1,\ j=n-1 \quad & \sum_{s=1}^{1}\sum_{t=1}^{n-1} u_{s,t} = u_{1,1}+\ldots+u_{1,n-1} \\
i=2,\ j=n-2 \quad & \sum_{s=1}^{2}\sum_{t=1}^{n-2} u_{s,t} = u_{1,1}+\ldots+u_{1,n-2}+u_{2,1}+\ldots+u_{2,n-2} \\
i=3,\ j=n-3 \quad & \sum_{s=1}^{3}\sum_{t=1}^{n-3} u_{s,t} = u_{1,1}+\ldots+u_{1,n-3}+u_{2,1}+\ldots+u_{2,n-3}+u_{3,1}+\ldots+u_{3,n-3} \\
& \vdots \\
i=n-2,\ j=2 \quad & \sum_{s=1}^{n-2}\sum_{t=1}^{2} u_{s,t} = u_{1,1}+u_{1,2}+u_{2,1}+u_{2,2}+\ldots+u_{n-2,1}+u_{n-2,2} \\
i=n-1,\ j=1 \quad & \sum_{s=1}^{n-1}\sum_{t=1}^{1} u_{s,t} = u_{1,1}+u_{2,1}+u_{3,1}+u_{4,1}+\ldots+u_{n-2,1}+u_{n-1,1}
\end{aligned}$$

Das Aufaddieren aller $(n-1)$ Summanden für $i+j=n$ bildet die Hauptsumme 2. Wird die Hauptsumme 2 von der Hauptsumme 1 abgezogen, bleibt übrig

$$u_{1,1}+\ldots+u_{1,n}+u_{2,1}+\ldots+u_{2,n-1}+u_{3,1}+\ldots+u_{3,n-2}+u_{n-1,1}+u_{n-1,2}+u_{n,1}.$$

Diese Summe entspricht genau dem Interpolanten $\hat{u}^I_{n,n} = \sum\limits_{s=1}^{n}\sum\limits_{t=1}^{n-s+1} u_{s,t}$. Damit ist die Identität gezeigt.

□

DEFINITION 4.8 (Fehlerentwicklung)**.** *Es seien* $C_1(x,y,h_x)$, $C_2(x,y,h_y)$, $C(x,y,h_x,h_y)$ *Funktionen mit der Eigenschaft, dass sie betragsmäßig durch die nicht-negative Funktion* $B(x,y)$ *für alle Gittermaschenweiten nach oben hin abgeschätzt werden können. Eine Funktion* $u_{h_x,h_y}(x,y)$*, die mit quadratischer Ordnung konvergiert, nennen wir Approximation von* u*, wobei* u *eine Abbildung* $u:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *ist, wenn* $u_{h_x,h_y}(x,y)$ *folgende Eigenschaft erfüllt:*

$$u_{h_x,h_y}(x,y)-u(x,y) = C_1(x,y,h_x)h_x^2 + C_2(x,y,h_y)h_y^2 + C(x,y,h_x,h_y)h_x^2h_y^2.$$

Bemerkung 4.4. Die Fehlerentwicklung wird benötigt, um die logarithmische Dämpfung des Fehlers für den Beweis von Satz 4.1 zeigen zu können. Außerdem ist es möglich, die

Fehlerentwicklung für eine Approximation aufzustellen, die mit allgemeiner Ordnung $p \geq 1$ konvergiert. Entsprechend anders sieht dann die Fehlerentwicklung und damit der Beweis der Kombinationstechnik aus. Die logarithmische Dämpfung des Fehlers bleibt davon unberührt, weil diese durch die hierarchischen Überschüsse entsteht.

SATZ 4.1. *Für den Interpolationsfehler im zweidimensionalen Fall* $(d = 2)$ *unter Voraussetzung von Def. 4.8 gilt folgende Abschätzung:*

$$|u - u_h| \leq K h_n^2 \Big(1 + \frac{5}{4} \log_2 h_n^{-1}\Big) = O(log\ h_n^{-1}\ h_n^2) \tag{4.7}$$

Im dreidimensionalen Fall $(d = 3)$ *gilt:*

$$|u - u_h| \leq K h_n^2 \Big(1 + \frac{65}{32} \log_2 h_n^{-1} + \frac{25}{32} (\log_2 h_n^{-1})^2\Big) = O(h_n^2 (\log\ \ h_n^{-1})^2) \tag{4.8}$$

Beweis von (4.7) aus Satz 4.1:
Wir wählen für die Gittermaschenweite $h_i^2 h_j^2 = h_{i+j}^2$ mit $h_i = \frac{1}{2^i}$.

$$\text{Es ist zu zeigen, dass } |e^C(x, y)| \leq B(x, y) h_n^2 \Big(1 + \frac{5}{4} \log(h_n^{-1})\Big) \text{ gilt.}$$

Der Fehler der *Kombinationstechnik* ε_n^C berechnet sich aus der Formel $u_n^C - u$, wobei u die exakte Funktion sei und u_n^C die Lösung der Kombinationsformel. Somit kann für u_n^C die Formel aus der Definition 4.7 eingesetzt werden.

$$\begin{aligned}
\varepsilon_n^C :&= u_n^C - u \\
&= \Big(\sum_{i+j=n+1} u_{h_i,h_j} - \sum_{i+j=n} u_{h_i,h_j} \Big) \\
&= u_{h_1,h_n} - u + u_{h_2,h_{n-1}} - u + \ldots + u_{h_{n-1},h_2} - u + u_{h_n,h_1} - u \\
&+ u_{h_2,h_{n-1}} - u + \ldots + u_{h_{n-1},h_1} - u.
\end{aligned}$$

Die Konstanten aus der Fehlerentwicklung hängen für den Beweis nicht von x, y ab. Das Einsetzen der Fehlerentwicklung aus Def. 4.8 für jeden Term $u_{h_i,h_j} - u$ führt auf:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_n^C &= u_n^C - u = C_1\ (h_1)\ h_1^2 + C_2(h_n)\ h_n^2 + C(h_1, h_n)\ h_1^2 h_n^2 + C_1(h_2)\ h_2^2 \\
&+ C_2(h_{n-1})\ h_{n-1}^2 + C(h_2, h_{n-1})\ h_2^2 h_{n-1}^2 + \ldots + C_1(h_{n-1})\ h_{n-1}^2 + C_2(h_2)\ h_2^2 \\
&+ C(h_{n-1}, h_2)\ h_{n-1}^2 h_2^2 + C_1(h_n)\ h_n^2 + C_2(h_1)\ h_1^2 + C(h_n, h_1)\ h_n^2\ h_1^2 \\
&- \Big(C_1(h_1)\ h_1^2 + C_2(h_{n-1})\ h_{n-1}^2 + C(h_1, h_{n-1})\ h_1^2\ h_{n-1}^2 + C_1(h_2)\ h_2^2 \\
&+ C_2(h_{n-2})\ h_{n-2}^2 + C(h_2, h_{n-2})\ h_2^2\ h_{n-2}^2 + \ldots + C_1(h_{n-1})\ h_{n-1}^2 + C_2(h_1)\ h_1^2 \\
&+ C(h_{n-1}, h_1)\ h_{n-1}^2\ h_1^2 \Big) \\
\underbrace{=}_{sortiert}\ & C_1(h_1) h_1^2 + C_1(h_2)\ h_2^2 + \ldots + C_1(h_{n-1})\ h_{n-1}^2 + C_1(h_n)\ h_n^2 + C_2(h_1)\ h_1^2 \\
&+ C_2(h_2)\ h_2^2 + \ldots + C_2(h_{n-1}) h_{n-1}^2 + C_2(h_n)\ h_n^2 + C(h_1, h_n)\ h_1^2\ h_n^2 + C(h_2, h_{n-1}) h_2^2 h_{n-1}^2 \\
&+ \ldots + C(h_n, h_1)\ h_n^2\ h_1^2 - \Big(C_1(h_1)\ h_1^2 + C_1(h_2)\ h_2^2 + \ldots + C_1(h_{n-1})\ h_{n-1}^2 \\
&+ C_2(h_1)\ h_1^2 + C_2(h_2)\ h_2^2 + \ldots + C_2(h_{n-1}) h_{n-1}^2 + C(h_1, h_{n-1})\ h_1^2\ h_{n-1}^2 + \ldots \\
&+ C(h_{n-1}, h_1)\ h_{n-1}^2\ h_1^2 \Big).
\end{aligned}$$

Zusammengefasst lässt sich der Fehler der *Kombinationstechnik* ε_n^C in folgender Formel ausdrücken:

$$\varepsilon_n^C = C_1(h_n)h_n^2 + C_2(h_n)\, h_n^2 + \sum_{i+j=n+1} C(h_i,h_j)\, h_i^2\, h_j^2 - \sum_{i+j=n} C(h_i,h_j)\, h_i^2\, h_j^2 \tag{4.9}$$

Betrachten wir dabei folgenden Teil ausführlicher:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i+j=n+1} C(h_i,h_j) \underbrace{h_i^2 h_j^2}_{h_{i+j}^2=h_{n+1}^2=h_1^2\ h_n^2=\frac{1}{4}h_n^2} - \sum_{i+j=n} C(h_i,h_j)\ \underbrace{h_i^2\ h_j^2}_{h_{i+j}^2=h_n^2} \\
&= \sum_{i+j=n+1} C(h_i,h_j)\frac{1}{4}h_n^2 - \sum_{i+j=n} C(h_i,h_j)h_n^2 \\
&= \frac{1}{4}\Big[C(h_1,h_n)+\ldots+C(h_{n-1},h_2)+C(h_n,h_1)\Big]h_n^2 - \Big[C(h_1,h_{n-1})+\ldots+C(h_{n-1},h_1)\Big]\ h_n^2 \\
&= \Big[\frac{1}{4}\sum_{i+j=n+1} C(h_i,h_j) - \sum_{i+j=n} C(h_i,h_j)\Big]h_n^2.
\end{aligned}$$

Das Ergebnis oben stehender Bemühungen $\Big[\frac{1}{4}\sum_{i+j=n+1} C(h_i,h_j) - \sum_{i+j=n} C(h_i,h_j)\Big]h_n^2$ in die Gleichung (4.9) eingesetzt, führt auf:

$$\varepsilon_n^C = C_1(h_n)h_n^2 + C_2(h_n)\, h_n^2 + \Big[\frac{1}{4}\sum_{i+j=n+1} C(h_i,h_j) - \sum_{i+j=n} C(h_i,h_j)\Big]h_n^2$$

Die Dreiecksungleichung auf ε_n^C angewendet ergibt:

$$\begin{aligned}
|\varepsilon_n^C| &\le |C_1(h_n)h_n^2| + |C_2(h_n)h_n^2| + \Big[\frac{1}{4}\sum_{i+j=n+1} C(h_i,h_j) + \sum_{i+j=n} C(h_i,h_j)\Big]\ h_n^2 \\
&\le B(x,y)h_n^2 + B(x,y)h_n^2 + \Big(\frac{1}{4}\underbrace{\sum_{i+j=n+1} B(x,y)}_{n\cdot B(x,y)} + \underbrace{\sum_{i+j=n} B(x,y)}_{(n-1)\cdot B(x,y)}\Big) \\
&= B(x,y)h_n^2(2+\frac{n}{4}+n-1) \\
&= B(x,y)h_n^2\Big(\frac{4+5n}{4}\Big) \\
&= B(x,y)h_n^2\Big(1+\frac{5}{4}n\Big) \\
&= B(x,y)h_n^2\Big(1+\frac{5}{4}\log_2(h_n^{-1})\Big) \qquad \Big(NR:\ \log_2(2^n)=\log_2(h_n^{-1})=n\Big) \\
&= B(x,y)h_n^2\Big(1+\frac{5}{4}\log_2(h_n^{-1})\Big)
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 4.5. Der Beweis von (4.8) aus Satz 4.1 kann [Grie04] auf S.6-8 entnommen werden.

4.3 Effizienz der Dünngitter-Technik

Die Betrachtungen werden ohne Randwerte vorgenommen. Die kontinuierliche Funktion $u \in X_0(\bar{\Omega})$ wird durch die Interpolationsfunktion $u_n^{(\infty)} \in V_n^{(\infty)}$ approximiert. Die Interpolationsfunktion im Dünngitterraum lautet $u_n^{(1)} \in V_n^{(1)}$. Die Dimension der Voll- und Dünngitterräume und die Interpolationsfehler, die entstehen, wenn die exakte Funktion u durch die jeweiligen Interpolanten auf den Voll- und Dünngitterräumen approximiert wird, sind die wesentlichen Variablen zur Effizienzbestimmung.

Im Folgenden sollen die Interpolationsfehler auf dem Dünn- und Vollgitterraum angegeben werden. Der Interpolant $u_n^{(\infty)}$ auf dem Vollgitter $V_n^{(\infty)}$ und die kontinuierliche exakte Funktion $u \in X_0(\bar{\Omega})$ besitzen folgende Gestalt:

$$u_n^{(\infty)} = \sum_{l_1=1}^{n} \dots \sum_{l_d=1}^{n} u_l, \quad u = \lim_{n \longrightarrow \infty} = \sum_{l_1=1}^{\infty} \dots \sum_{l_d=1}^{\infty} u_l, \tag{4.10}$$

wobei u_l aus (4.6) der Anteil am Interpolanten ist, der im Funktionenraum W_l liegt. Aus beweistechnischen Gründen wird die Halbnorm $|u|_\infty = \left|\left|\frac{\partial^{2d} u(x)}{\prod_{j=1}^{d} \partial x_j^2}\right|\right|_\infty$ vorab eingeführt.

Wir wollen zeigen, dass der Interpolationsfehler, der im Dünngitterraum begangen wurde, größer ausfällt als der Vollgitterinterpolationsfehler.

LEMMA 4.2. *Der Interpolationsfehler $|u - u_n^{(\infty)}|$ einer kontinuierlichen Funktion $u \in X_0(\bar{\Omega})$ mit dem Vollgitterinterpolanten $u_n^{(\infty)}$ des Vollgitterraums $V_n^{(\infty)}$ bei einem maximalen Level n und der Gittermaschenweite $h = 2^{-n}$ zur Hütchenbasis besitzt folgende Ordnung:*

$$|u - u_n^{(\infty)}|_\infty = O(h^2)$$

Beweis[5]:
Die Interpolante $u_n^{(\infty)}$ und die kontinuierliche Funktion u sind in (4.10) beschrieben. Die Gittermaschenweite h entspricht der bekannten Belegung $h = 2^{-n}$. Für die zweite Zeile im Beweis gilt die Abschätzung

$$||u_{(l_1,\dots,l_d)}||_\infty \leq \frac{|u|_\infty}{2^d} h_{l_1}^2 \dots h_{l_d}^2.$$

Diese Abschätzung geht aus Lemma 2.3 und 2.4 [Bun92] S.10-12 hervor.

$$\begin{aligned}
|u - u_n^{(\infty)}|_\infty &\leq \Big| \sum_{l_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{l_d=1}^{\infty} u_{(l_1,\dots,l_d)} - \sum_{l_1=1}^{n} \cdots \sum_{l_3=1}^{n} u_{(l_1,\dots,l_d)} \Big|_\infty \\
&\leq \sum_{(l_1,\dots,l_d):\ \exists i_j > n} \underbrace{||u_{(l_1,\dots,l_d)}||_\infty}_{\leq \frac{|u|_\infty}{2^d} h_{l_1}^2 \dots h_{l_d}^2} \\
&\leq \sum_{(l_1,\dots,l_d):\ \exists i_j > n} \frac{|u|_\infty}{2^d} h_{l_1}^2 \dots h_{l_d}^2 \\
&= \frac{|u|_\infty}{2^d} \Big(\sum_{l_1=1}^{\infty} \dots \sum_{l_d=1}^{\infty} 4^{-l_1} \dots 4^{-l_d} - \sum_{l_1=1}^{n} \dots \sum_{l_d=1}^{n} 4^{-l_1} \dots 4^{-l_d} \Big) \\
&= \frac{|u|_\infty}{2^d} \Big(\big(\sum_{l_1=1}^{\infty} 4^{-l_1} \big)^d - \big(\sum_{l_1=1}^{n} 4^{-l_1} \big)^d \Big) \\
&= \frac{|u|_\infty}{2^d} \Big(\big(\frac{1}{3}\big)^d - \big(\frac{1}{3}\big)^d \left(1 - 4^{-n}\right)^d \Big) = \frac{|u|_\infty}{2^d} \Big(\frac{1}{3}\Big)^d \Big(1 - (1 - 4^{-n})^d\Big) \\
&\leq \frac{|u|_\infty}{2^d} \frac{d\ 4^{-n}}{3^d} = \frac{d\ |u|_\infty}{6^d} h_n^2 = 0(h_n^2)
\end{aligned}$$

□

[5] Der Beweis des Lemmas 4.2 entstammt [Bun92] S.14.

LEMMA 4.3. *Der Interpolationsfehler* $|u - u_n^{(1)}|$ *einer kontinuierlichen Funktion* $u \in X_0(\bar{\Omega})$ *mit dem Dünngitterinterpolanten* $u_n^{(1)}$ *des Dünngitterraums* $V_n^{(1)}$ *und der Gittermaschenweite* $h = 2^{-n}$ *zur Hütchenbasis besitzt folgende Ordnung:*

$$|u - u_n^{(1)}|_\infty = O(h^2 \ (\log h_n^{-1})^{d-1})$$

Bemerkung 4.6. Der Beweis kann [Bun92] Satz 3.1, S.17-18 entnommen werden. In (4.7) für den Fall $d = 2$ und in (4.8) für den Fall $d = 3$ aus Satz 4.1 kann ebenfalls die Ordnung des Lemmas 4.3 gezeigt werden.

Für die Effizienz wird neben den Interpolationsfehlern noch die Dimension der Voll- und Dünngitterräume benötigt. Die Anzahl der Freiheitsgrade des Vollgitterraums $V_n^{(\infty)}$ entspricht der Anzahl der den Basisfunktionen zugeordneten Stützstellen im korrespondierenden Gitter $\Omega_n^{(\infty)}$. Für die Gitterdimension des Vollgitterraums $V_n^{(\infty)}$ gilt mit der Gittermaschenweite $h = 2^{-n}$ eines $d-$dimensionalen Gitters

$$dim\ V_n^{(\infty)} = (2^n - 1)^d = O(h^{-d}). \tag{4.11}$$

Die Dimension des Dünngitterraums $V_n^{(1)}$ wird auch über die Anzahl der Gitterpunkte bzw. Freiheitsgrade des Dünngitters $\Omega_n^{(1)}$ angegeben

$$dim\ V_n^{(1)} = O(2^n \cdot n^{d-1}) = O(h^{-1}|\log\ h|^{d-1}). \tag{4.12}$$

Bemerkung 4.7. Die Beweise für (4.11) und (4.12) befinden sich in [Bun92] S.17 und S.19.

Vergleicht man die Dimension des Voll- und Dünngitterraums aus (4.11) und (4.12) miteinander, so wird man feststellen, dass die Dimension des Dünngitterraums geringer ausfällt. Dies kann aus dem folgenden Beispiel abgelesen werden:

Beispiel 4.1. *Als Beispiel dient* $m = 2^n = h^{-1}$*, dann ist für den Fall* $d = 2$*:*

$$\dim\ V_n^{(\infty)} = (m-1)^2 = O(m^2)\ \mathit{und}\ \dim\ V_n^{(1)} = O(m\ (log\ m))$$

oder für den Fall $d = 3$:

$$\dim\ V_n^{(\infty)} = (m-1)^3 = O(m^3)\ \mathit{und}\ \dim\ V_n^{(1)} = O(m\ (log\ m)^2)$$

Mit Beispiel 4.1 wird ersichtlich, dass mit dem Dünngitter der "Fluch der Dimensionen" durchbrochen werden kann, d.h. bei dem Dünngitter besteht keine exponentielle Abhängigkeit mehr zwischen der Anzahl der Freiheitsgrade und der Raumdimension. Setzt man die feinste Gittermaschenweite $h_n = 2^{-n}$ in Lemma 4.3 ein, gilt für die Ordnung des Interpolationsfehlers des Dünngitterraums $h_n^2(\log\ h_n^{-1})^{d-1} = 2^{-2n}n^{d-1}$. Mit wachsendem n, bei fester Wahl der Dimension d, überwiegt der exponentielle Abfall in 2^{-2n} gegenüber dem Ansteigen von n^{d-1}. Damit liefert das Dimensions-Fehler-Kalkül einen klaren Effizienzvorteil zu Gunsten der Dimension. Der numerische Aufwand kann durch die Reduzierung der Problemdimension gedrosselt werden, ohne dass dadurch der Informationsgehalt der erhaltenen Lösung Schaden nimmt.

4.4 Exponentieller Abfall der hierarchischen Überschüsse

Nachfolgend soll eine kontinuierliche Funktion $u \in X_0(\bar{\Omega})$ mit $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \bar{\Omega}$ durch den d-dimensionalen, stückweise multilinearen Interpolanten $u_n^{(\infty)} \in V_n^{(\infty)}$ approximiert werden. Der Interpolationsfehler $||u - u_n^{(\infty)}||$ des Vollgitterraums kann dabei in der $L^{2,\infty}-$Norm $||u||_{2,\infty} := \sup\limits_{x \in \bar{\Omega}} |u(x)|$ oder in der kontinuierlichen L^2-Norm $||u||_2 := \Big(\int\limits_{\bar{\Omega}} |u(x)|^2 dx \Big)^{\frac{1}{2}}$ gemessen werden. Die diskrete L^1-Norm angewandt auf dem Multiindex l ist wie folgt definiert: $|l|_1 := \sum\limits_{j=1}^{d} l_j$. Darüber hinaus definiert man für $u \in X_0(\bar{\Omega})$ zwei Halbnormen

$$|u|_2 = \Big|\Big| \frac{\partial^{2d} u(x)}{\prod\limits_{j=1}^{d} \partial x_j^2} \Big|\Big|_2 = \Big(\int\limits_{\bar{\Omega}} \Big| \frac{\partial^{2d} u}{\prod\limits_{j=1}^{d} \partial x_j^2} \Big|^2 dx \Big)^{\frac{1}{2}} \text{ und} \tag{4.13}$$

$$|u|_{2,\infty} = \Big|\Big| \frac{\partial^{2d} u(x)}{\prod\limits_{j=1}^{d} \partial x_j^2} \Big|\Big|_\infty = \sup_{x \in \bar{\Omega}} \Big| \frac{\partial^{2d} u(x)}{\prod\limits_{j=1}^{d} \partial x_j^2} \Big|. \tag{4.14}$$

Für jede Basisfunktion $\Phi_{l,i}$ des Teilraums W_l gilt

$$||\Phi_{l,i}||_\infty = 1, \; ||\Phi_{l,i}||_2 = \Big(\frac{2}{3}\Big)^{\frac{3}{2}} 2^{|l|_1/2}. \tag{4.15}$$

Dies kann leicht aus der expliziten Form (4.3) berechnet werden. Die hierarchischen Überschüsse sind die Koeffizienten bzgl. der hierarchischen Basisdarstellung. Mit dem nachfolgenden Lemma können die hierarchischen Überschüsse durch eine Integral- bzw. Produktdarstellung präzisiert werden.

LEMMA 4.4. *Für die hierarchischen Überschüsse $v_{l,i}$ zu den Multiindizes l und i eines $d-$dimensionalen Gitters gilt die Integraldarstellung bzw. Produktdarstellung:*

$$v_{l,i} = -2^{-|l|_1 - d} \int\limits_{\Omega} \Phi_{l,i} \frac{\partial^{2d} u(x)}{\partial x_1^2 \ldots x_d^2} dx \text{ bzw.} \tag{4.16}$$

$$= \Big(\prod_{j=1}^{d} \Big[-\frac{1}{2} \; 1 \; -\frac{1}{2} \Big]_{x_{l_j,i_j,l_j}} \Big) u, \tag{4.17}$$

wobei u aus $X_0(\bar{\Omega})$ ist.

Zu (4.17) betrachtet man exemplarisch die Interpolierende $u_2^{(\infty)} \in V_2^{(\infty)}$ einer Funktion $u \in X_0(\bar{\Omega})$ mit $d = 1$. Stellt man sie einerseits bzgl. der Knotenbasis und anderseits bzgl. der hierarchischen Basis dar, so gilt

$$\underbrace{u(x_1)\Phi_{2,1} + u(x_2)\Phi_{2,2} + u(x_3)\Phi_{2,3}}_{\text{Knotenbasis}} = \underbrace{v_{2,1}\Phi_{2,1} + v_{1,1}\Phi_{1,1} + v_{2,3}\Phi_{2,3}}_{\text{hierarchische Basis}}.$$

Man berechne durch Koeffizientenvergleich $v_{l,i}$ aus den $u(x_j)$ und benutze, dass $\Phi_{1,1} = \frac{1}{2}\Phi_{2,1} + \Phi_{2,2} + \frac{1}{2}\Phi_{2,3}$ ist. Des Weiteren folgt

$$\begin{aligned} &u(x_1)\Phi_{2,1} + u(x_2)\Phi_{2,2} + u(x_3)\Phi_{2,3} \\ =&v_{2,1}\Phi_{2,1} + v_{1,1}\Big(\frac{1}{2}\Phi_{2,1} + \Phi_{2,2} + \frac{1}{2}\Phi_{2,3}\Big) + v_{2,3}\Phi_{2,3} \\ =&\Big(\frac{1}{2}v_{1,1} + v_{2,1}\Big)\Phi_{2,1} + v_{1,1}\Phi_{2,1} + \Big(\frac{1}{2}v_{1,1} + v_{2,3}\Big)\Phi_{2,3}. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Der Koeffizientenvergleich aus (4.18) liefert:

$$u(x_1) = \frac{1}{2}v_{1,1} + v_{2,1},\ u(x_2) = v_{1,1},\ u(x_3) = \frac{1}{2}v_{1,1} + v_{2,3}$$
$$\text{bzw. } v_{1,1} = u(x_2),\ v_{2,1} = u(x_1) - \frac{1}{2}v_{1,1} = u(x_1) - \frac{1}{2}u(x_2),\ v_{2,3} = u(x_3) - \frac{1}{2}u(x_2)$$

Um den hierarchischen Koeffizienten zur hierarchischen Basisfunktion zu ermitteln, der zu einem Punkt x_j gehört, muss einfach $-\frac{1}{2}u(x_{j-1}) + u(x_j) - \frac{1}{2}u(x_{j+1})$ berechnet werden. Dies rechtfertigt dann die Schreibweise von (4.17) aus Lemma 4.4.

Beweis von (4.16) aus Lemma 4.4:
Unter Verwendung von (4.16) für $d = 1$ folgt mit partieller Integration für

$$v_{l,i} = -2^{-l_1-1} \int\limits_{\Omega} \Phi_{l,i} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1^2} dx_1$$

die Darstellung der hierarchischen Überschüsse

$$v_{l,i} = -\frac{1}{2}u(x_{l,i-1}) + u(l,i) - \frac{1}{2}u(x_{l,i+1}).$$

Der Beweis lässt sich auf $d-$Dimensionen verallgemeinern, wenn die partielle Integration nacheinander für jede Variable einzeln ausgeführt wird, vgl. dazu [Bun98] Lemma 2.2, S.12.

□

Das nächste Lemma dient als Vorbereitung, um die Reduktion der Problemdimension der Dünngitter-Technik ablesen zu können[6].

LEMMA 4.5. *Für den Betrag der hierarchischen Koeffizienten $v_{l,i}$ mit Multiindizes l und i eines $d-$dimensionalen Dünngitterraums $V_n^{(1)}$ zum maximalen Level n mit $|l|_1 \leq n + d - 1$ gilt* [7]*:*

$$|v_{l,i}| \leq 2^{-2|l|_1 - d}|u|_{2,\infty},$$

wobei u aus $X_0(\bar{\Omega})$ ist.

Beweis:
Nach (4.16) gilt

$$|v_{l,i}| = \left| -2^{-|l|_1-d} \int\limits_{\bar{\Omega}} \Phi_{l,i} \frac{\partial^{2d} u(x)}{\partial^2 x_1 \dots \partial^2 x_d} dx \right| \leq 2^{-|l|_1-d} \int\limits_{\bar{\Omega}} |\Phi_{l,i}| \underbrace{\left|\left| \frac{\partial^{2d} u(x)}{\partial^2 x_1 \dots \partial^2 x_d} \right|\right|_\infty}_{\leq |u|_{2,\infty} \text{ nach Formel (4.14)}} dx$$
$$\leq 2^{-|l|_1-d}|u|_{2,\infty} \int\limits_{\bar{\Omega}} |\Phi_{l,i}|\, dx = 2^{-|l|_1-d}\, |u|_{2,\infty}\, 2^{-|l|_1} = 2^{-2|l|_1-d}\, |u|_{2,\infty},$$

da $\int\limits_{\bar{\Omega}} |\Phi_{l,i}|\, dx = 2^{-|l|_1}$, das trivial aus [Bun98] auf S.33 mit der expliziten Darstellung (32) folgt.

□

[6] [Bun98] Lemma 2.1, S.11.
[7] [Kür03] S.15 unten

Bemerkung 4.8. Steigt die Leveltiefe bzw. der maximale Level n an, dann fällt der Wert der hierarchischen Überschüsse exponentiell gegen Null. Damit können Teile der hierarchischen Basis weggelassen werden, für die die hierarchischen Überschüsse relativ klein sind. Diese ausselektierten hierarchischen Basen leisten keinen merklichen Beitrag zum Ansteigen des Interpolationsfehlers, aber verhelfen sehr wohl dazu, die Problemdimension spürbar zu reduzieren und somit den "Fluch der Dimensionen" zu durchbrechen. Die Darstellung des Funktionenraumes über eine hierarchische Basis erweist sich für die Interpolationsaufgabe als sinnvoller, weil diese Darstellung eine Glättung der Interpolationsfehler gewährleistet. Dies führt in seiner Konsequenz dann zu einem effizienteren Algorithmus.

Der Beitrag der Funktion $u_l \in W_l$ zum Interpolanten u lässt sich folgendermaßen abschätzen:

$$||u_l||_\infty \leq 2^{-d} 2^{-2|l|_1} |u|_{2,\infty}, \tag{4.19}$$

$$||u_l||_2 \leq 3^{-3} 2^{-2|l|_1} |u|_2 \tag{4.20}$$

Mit zunehmender Leveltiefe n fällt der Beitrag der Funktion $u_l \in W_l$ aus (4.6) exponentiell gegen Null. Dahinter verbirgt sich der Einfluss der hierarchischen Überschüsse, die, wie bereits gezeigt, ebenfalls mit wachsender Leveltiefe n exponentiell gegen Null fallen.

Beweis zu (4.19):
Es ist $u_l = \sum\limits_{i \in I_l}$ mit der Indexmenge I_l gemäß (4.4). Da die beteiligten Basisfunktionen $\Phi_{l,i}$ mit $i \in I_l$ für dieses feste l paarweise disjunkte Träger besitzen und ihr Maximum im jeweils zugeordneten Gitterpunkt $x_{l,i}$ annehmen, gibt es einen Multiindex $i_0 \in I_l$, so dass die Funktion $|u_l|$ ihr Maximum in x_{l,i_0} annimmt:

$$\begin{aligned} ||u_l||_\infty &= |u_l(x_l, i_0)| = |v_{l,i_0}| \cdot |\Phi_{l,i_0}(x_l, i_0)| \\ &= |v_{l,i_0}| \\ &\leq 2^{-2|l|_1 - d} |u|_{2,\infty} \quad \text{nach Lemma 4.5} \end{aligned}$$

□

4.5 Vergleich von Vollgitter- und Kombinationslösung

Wie bereits erwähnt wurde, entstammt die grundlegende Idee der *Kombinationstechnik* der Theorie der Dünngitter. Die Kombinationslösung ist i.d.R. nicht identisch mit der Lösung auf dem Dünngitter. Unter gewissen Voraussetzungen, die für die Lösung der PDE angenommen werden müssen, besitzt der Fehler der *Kombinationstechnik*-Lösung dieselbe Ordnung wie der Dünngitterinterpolant $u_n^{(1)}$. Um eine Kombinationslösung mit einer Vollgitterlösung vergleichen zu können, muss die Kombinationslösung auf dem Vollgitter gebildet werden. Die Kombinationslösung u_n^c wird auf einem Dünngitter $\Omega_n^{(1)}$ berechnet und besitzt weniger Gitterpunkte als die entsprechende Vollgitterlösung u_n auf dem Vollgitter $\Omega_n^{(\infty)}$. Zum Vergleich der Vollgitter- und Kombinationslösung wird die diskrete L^2-Norm herangezogen. Es gibt zwei Arten zur Berechnung des Fehlers. "Entweder man interpoliert die Kombinationslösung auf dem Vollgitter und berechnet die L^2-Norm der Differenz der Lösungen auf allen Vollgitterpunkten, oder man berechnet sie nur auf den Gitterpunkten des Kombinationsgitters."[8]

[8]entnommen aus [Kranz02] auf S.42-43

Der Operator I_h sei dafür verantwortlich, dass eine auf einem gröberen Gitter gegebene Lösung auf das Gitter $\Omega_n^{(\infty)}$ interpoliert wird. Formal lässt sich die Fehlerdifferenz dann in folgender Form aufschreiben:

$$\varepsilon_h = \Big(\frac{1}{\#\Omega_n^{(\infty)}} \sum_{x \in \Omega_n^{(\infty)}} (u_h(x) - (I_h u_h^c)(x))^2 \Big),$$

$$\varepsilon_h^c = \Big(\frac{1}{\#\Omega_n^{(1)}} \sum_{x \in \Omega_n^{(1)}} (u_h^c(x) - (I_h^c u_h)(x))^2 \Big) \quad \text{(die Fehlerdifferenz in der } L^2\text{−Norm)}$$

Die Begriffe Vollgitter, Dünngitter und *Kombinationstechnik* können anhand der Abbildung 4.3 sich vergegenwärtigt werden. Dabei kann die Vollgitterdarstellung im “quadratischen Fenster“ links in der Abbildung 4.3 wiedergefunden werden. In der Mitte der Abbildung sieht man das obere Dreieck für die Dünngitter-Darstellung. Die *Kombinationstechnik* kann rechts in dieser Abbildung betrachtet werden. Dies entspricht einer geeigneten Linearkombination der reflektierten Sub- und Superdiagonalen. Im zweidimensionalen Raum wird in beide Richtungen jeweils für sich alleine die Maschenweite halbiert. Dabei entstehen Funktionenräume $W_{(l_1,l_2)}$ mit folgender Anzahl von Freiheitsgraden, die aus der folgenden anschaulichen Matrix hervorgehen:

$$\begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} & W_{13} \\ W_{21} & W_{22} & W_{23} \\ W_{31} & W_{32} & W_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times 1 & 1\times 3 & 1\times 7 \\ 3\times 1 & 3\times 3 & 3\times 7 \\ 7\times 1 & 7\times 3 & 7\times 7 \end{pmatrix}, \; V_{(l_1,l_2)} \to (2^{l_1}-1)\times(2^{l_2}-1)$$

Die Matrix ist so zu lesen, dass z.B. für den zweidimensionalen Funktionenraum $W_{2,2}$ zum maximalen Level $n = 3$ unter der Verwendung der nodalen Basis in beide Richtungen jeweils zwei Halbierungen vorgenommen wurden. Dies führt dann zu einem Gitter mit neun Freiheitsgraden, ausgerechnet mit der Formel (4.5).

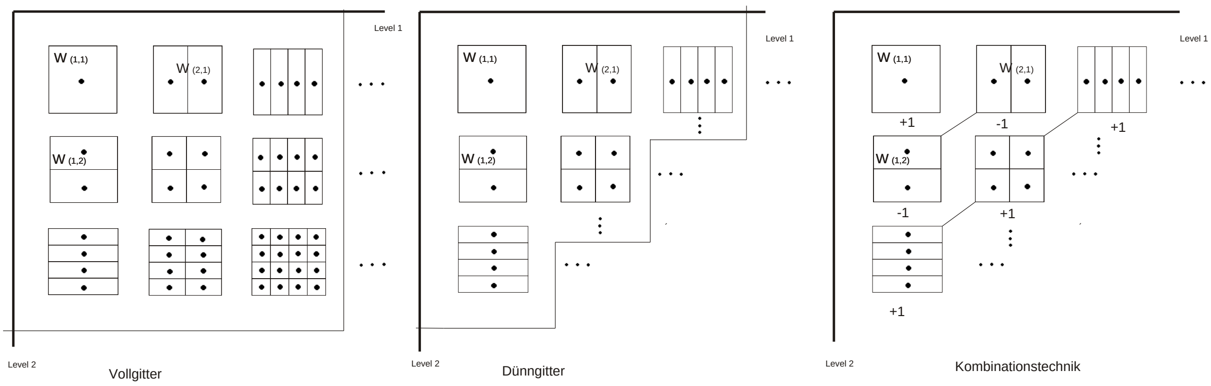

Abbildung 4.3: Zusammensetzung der zweidimensionalen Räume $V_3^{(\infty)}$ (links) und $V_3^{(1)}$ (Mitte) sowie die Bildung der Linearkombination der Kombinationstechnik basierend auf dem Dünngitter $V_3^{(1)}$ (rechts).

Die Dünn- und Vollgitter $V_3^{(1)}$ bzw. $V_3^{(\infty)}$ können aus der Abbildung 1.1 in der Einleitung der Diplomarbeit entnommen werden.

5 Anwendung der Kombinationstechnik

5.1 Wichtige Berechnungsformeln

Als Grundlage für den praktischen Einsatz der Kombinationstechnik wurden die numerischen Algorithmen für die verschiedenen Optionstypen implementiert. Die praktische Umsetzung der Kombinationstechnik wurde dabei in die Algorithmen der Optionstypen eingebettet. Zu Beginn jedes Optionstyps wird der dabei verwendete Algorithmus vorgestellt. Es gibt sicherlich andere Wege, den Algorithmus aufzustellen. Hier wurde ein Mittelweg zwischen Anschaulichkeit und Effektivität der betrachteten Algorithmen beschritten. Aus den im Anschluß folgenden Tabellen kann das numerische Verhalten der disrektisierten Lösung mit und ohne Kombinationstechnik abgelesen werden.

In dieser Arbeit wurde mit der punktweisen Konvergenz gearbeitet, d.h. es wurde ein ausgezeichneter Gitterpunkt der diskretisierten Differentialgleichung für alle Koordinatenzerlegungen zur Fehleranalyse herausgegriffen. So wurde immer zum Zeitpunkt $t = 0$ und $S = K$ ausgewertet, da vor allem aus praktischer Sicht die Investmentbanken interessiert, welchen Preis sie stellen müssen, sobald die Option ins Geld kommt ($S = K$), wenn keine Gebühren oder sonstige Transaktionskosten anfallen und das Optionsgeschäft zu leben beginnt in $t = 0$. Auf diesen Preis aufbauend kalkulieren sie den festgelegten Vergabepreis der Option zuzüglich einer Gewinnmarge für das eigene Investmenthaus. Als nächstes werden die wichtigsten Berechnungsformeln zum besseren Verständnis der Tabellen für die Optionspreisaufgaben vorgestellt und kurz diskutiert.

Zur formalen Beschreibung der Schicht von Gittern, die im zwei- und höherdimensionalen Raum bei der *Kombinationstechnik* verwendet werden, kann folgende Formel herangezogen werden:

$$n = |l|_1 - d + 1 = l_1 + \ldots + l_d - d + 1, \tag{5.1}$$

wobei n der maximale Level sei, d die Dimension des betrachteten Raumes und $l = (l_1, \ldots, l_d)$ der Multiindex für die Zerlegungen in die einzelnen $d-$Richtungen. Die Formel ist aus der Tatsache entstanden, dass wenn $|l|_1 = d$ ist, d.h. für eine einfache Diskretisierung 2^{-1} in alle $d-$Richtungen, genau der maximale Level 1 herauskommen muss. Die Formel (5.1) dient im zweidimensionalen Raum zur Beschreibung der reflektierenden Sub- und Superdiagonalen im Dünngitter. Dies kann aus der Abbildung 4.3 (rechts) auf S.54 entnommen werden. Ist in dieser Abbildung z.B. $(l_1, l_2) = (1, 2)$ oder $(l_1, l_2) = (2, 1)$, dann liegen beide betrachteten Gitter auf einer reflektierenden Diagonalen zum maximalen Level $n = 2$. Dies deckt sich auch mit der Kombinationsformel aus Definition 4.7, S.45. In höheren Dimensionen $d \geq 3$ werden dann entsprechend andere Schichten von Gittern betrachtet.

Die Berechnung der Anzahl der Unbekannten[1] für die *Kombinationstechnik* kann über die Definition 4.7 und Bemerkung 4.2 für $d = 2, 3, 4$ ermittelt werden. Die Berechnungsformeln

[1]DOF engl. Degree of Freedom - Freiheitsgrade

lauten daher

$$DOF := \sum_{l_1+l_2=n+1} DOF_{(l_1,l_2)} - \sum_{l_1+l_2=n} DOF_{(l_1,l_2)} \text{ (zweidimensional)} \tag{5.2}$$

$$DOF := \sum_{|l|_1=n+2} DOF_l - 2 \sum_{|l|_1=n+1} DOF_l + \sum_{|l|_1=n} DOF_l \text{ (dreidimensional),} \tag{5.3}$$

$$DOF := \sum_{|l|_1=n+3} DOF_l - 3 \sum_{|l|_1=n+2} DOF_l + 3 \sum_{|l|_1=n+1} DOF_l - \sum_{|l|_1=n} DOF_l \text{ (vierdim.),} \tag{5.4}$$

wobei DOF_l die Anzahl der Unbekannten auf dem Vollgitter zu dem jeweiligen Level l sind. Allgemein sind für jeden Zeitpunkt $(2^{l_1}-1)\dots(2^{l_{d-1}-1})$ Unbekannte im inneren Gebiet zu lösen und das für 2^{l_d} verschiedene Zeitpunkte, so dass insgesamt

$$DOF_{(l_1,\dots,l_d)} = 2^{l_d} \cdot (2^{l_1}-1)\dots(2^{l_{d-1}}-1) \; \forall \; d = 2,3,4 \tag{5.5}$$

Unbekannte zu lösen sind.

In dieser Arbeit wird zur Effizienzanalyse die $\varepsilon-$Komplexität[2] herangezogen, d.h. man gibt sich die (relative oder absolute) Fehlertoleranzschranke vor und beobachtet dann, bei welcher Leveltiefe sich die Fehlertoleranzschranke wiederfinden lässt. Bei Fehlerabschätzungen wird im Allgemeinen der umgekehrte Weg gegangen. Man gibt sich die Tiefe vor und sucht den korrespondierenden Fehler. Unter Effizienz verstehen wir in diesem Kontext, dass für gröbere Gitter unter Einsatz der *Kombinationstechnik* derselbe Fehler geliefert wird wie für ein feineres Gitter ohne Verwendung der *Kombinationstechnik*. Die Summe der Anzahl der Unbekannten aus den gröberen Gittern ist dann geringer als die Anzahl der Unbekannten des feineren Gitters.

Die Konvergenz auf den Vollgittern wurde durch die Fehlerreduktion auf der Hauptdiagonalen berechnet, d.h. in allen Dimensionsrichtungen wurde jeweils dieselbe Gittermaschenweite verwendet. Der relative Fehler $error_n^C$ der Kombinationslösung zum aktuellen Level n unter Verwendung der *Kombinationstechnik* für den zweidimensionalen Fall ist durch folgende Formel gegeben:

$$error_n^C = \frac{\left|\left(\sum_{|l|=n+1} V_l - \sum_{|l|=n} V_l\right)(S^\star,t^\star) - V_{exakt}(S^\star,t^\star)\right|}{\left|V_{exakt}(S^\star,t^\star)\right|}$$

zum ausgewählten Punkt $(S^\star,t^\star) \in \mathbb{R}^2$. Nachvollziehbar ist die Formel, wenn (5.2) herangezogen wird. Entsprechend sieht die Berechnung des relativen Fehlers $error_n^C$ der Kombinationslösung zum aktuellen Level n für den dreidimensionalen Fall, unter Verwendung von (5.3), wie folgt aus:

$$error_n^C = \frac{\left|\left(\sum_{|l|=n+2} V_l - 2\sum_{|l|=n+1} V_l + \sum_{|l|=n} V_l\right)(S_1^\star,S_2^\star,t^\star) - V_{\text{referenz}}(S_1^\star,S_2^\star,t^\star)\right|}{\left|V_{\text{referenz}}(S_1^\star,S_2^\star,t^\star)\right|}$$

zum ausgewählten Punkt $(S_1^\star,S_2^\star,t^\star) \in \mathbb{R}^3$. Der relative Fehler $error_n^C$ der Kombinationslösung zum aktuellen Level n für den vierdimensionalen Fall, unter Verwendung von (5.4), ergibt sich zu

[2] orientiert sich an [Zum00] S.3

$$error_n^C = \frac{\left|\left(\sum\limits_{|l|=n+3} V_l - 3\sum\limits_{|l|=n+2} V_l + 3\sum\limits_{|l|=n+1} V_l - \sum\limits_{|l|=n} V_l\right)(S_1^\star, S_2^\star, S_3^\star, t^\star) - V_{\text{referenz}}(S_1^\star, S_2^\star, S_3^\star, t^\star)\right|}{\left|V_{\text{referenz}}(S_1^\star, S_2^\star, S_3^\star, t^\star)\right|}$$

zum ausgewählten Punkt $(S_1^\star, S_2^\star, S_3^\star, t^\star) \in \mathbb{R}^4$.

Zur besseren Ablesbarkeit der Konvergenzordnung des Verfahrens wird die geglättete Reduktion mit folgender Formel berechnet:

$$\zeta_{\text{glätt}} := \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_k}\right)^{\frac{1}{k}}, \tag{5.6}$$

wobei ε_k der Fehler zur $k-$ten Stufe ist.

Bemerkung 5.1 (Für die Tabellen der zweidimensionalen Kombinationstechnik)**.** Die Zeilen in den Tabellen 5.1, 5.2, 5.4, 5.5, 5.7, 5.8, 5.11, 5.12, 5.14 und 5.15 stehen für die Gitterdiskretisierung in Zeitrichtung, und die Spalten dieser Tabellen stehen für die Gitterdiskretisierung in Kursrichtung. Dabei wurde auf den verschiedenen Gittern immer in dem Punkt $(S = K, t = 0)$ ausgewertet. Nach rechts nimmt spaltenweise und nach unten zeilenweise die Feinheit der Gitter zu. Die Zeilen- und Spaltenköpfe beinhalten die Zweierpotenz der Gittermaschenweite h. In Zeilenrichtung sind $h = 2^{-z}$ und in Spaltenrichtung sind $h = 2^{-p}\ \forall\ z, p = \{3, \ldots, 10\}$ möglich. Die Gitter haben dann $(2^z - 1) \cdot (2^p - 1)$ Unbekannte, die bestimmt werden müssen. Die Tabellen 5.3, 5.6, 5.9, 5.13 und 5.16 enthalten die Ergebnisse der *Kombinationstechnik* für den zweidimensionalen Fall.

5.2 Zweidimensionale Probleme bei europäischen Optionen

Durch geeignete Parameterwahl kann die Wirkungsweise der *Kombinationstechnik* gesteuert werden. Es ist nach solchen Parametern gesucht worden, mit deren Hilfe der Effizienzgewinn der *Kombinationstechnik* gezeigt werden kann. Für den zweidimensionalen Fall fällt der Effizienzgewinn nicht in so deutlicher Höhe aus wie für höherdimensionale Probleme. Bei höheren Dimensionsordnungen, so z.B. für die Basket-Optionen, müssen die Parameter nicht mehr festgelegt sein, weil die Effizienz mit zunehmender Problemdimension immer deutlicher ausfällt. Die europäischen Optionen bestätigten die Theorie der *Kombinationstechnik*, obwohl die Lösungsfunktion nicht an allen Stellen glatt im Sinne unserer Glattheitsforderung Definition 4.1 ist. Es wird sich in den nachfolgenden Unterabschnitten zeigen, dass die *Kombinationstechnik* trotz einer nicht glatten Stelle ihre Wirkung halten kann. Um die *Kombinationstechnik* für europäische Optionen anwenden zu können, muss der Algorithmus für diese erst umgesetzt werden. Dies geschieht im folgenden Unterabschnitt.

5.2.1 Implementierung des Algorithmus für europäische Optionen

Wie bereits zu Beginn von Kapitel 2 erwähnt, ist bei der europäischen Option die exakte Black-Scholes-Lösungsformel bekannt. Sie kann analytisch hergeleitet werden. In Abschnitt 2.2 sind in den Sätzen 2.1 und 2.2 die geschlossenen Black-Scholes-Lösungsformeln für den europäischen Call und Put vermerkt. Die numerische Auswertung der geschlossenen Black-Scholes-Lösungsformel wird in dieser Arbeit mit der integrierten MATLAB-Funktion der

Normalverteilung “normcdf“ vorgenommen. Diese Funktion ist recht genau, aber hoch aufwendig. Der hohe Aufwand wurde in Kauf genommen, damit kein Fehler von der numerischen Auswertung der Black-Scholes-Lösungsformel ausgeht[3]. Als effizientes Mittel zum Lösen eines tridiagonalen Gleichungssystems kann, wie bereits erwähnt, die LU-Zerlegung verwendet werden. Durch direkten Koeffizientenvergleich kann der LU-Algorithmus hergeleitet werden[4]. Iterativ beginnend mit der Anfangswertlösung kann für jeden Zeitschritt die Lösung der transformierten Wärmeleitungsgleichung ermittelt werden.

Algorithmus 5.1 (Algorithmus zur Berechnung der europäischen Optionen)**.** Die Matrizen $\hat{A}$, $\hat{B}$ und der Vektor g entstammen dem Gleichungssystem (2.17), S.17. Folgende Programmroutine wurde eingesetzt[5], um die europäischen Optionspreise numerisch zu berechnen:

wähle a, n, m, ϑ berechne $\Delta x = \frac{2a}{n},\ \Delta\tau = \frac{2a}{m},\ 0 \leq \vartheta \leq 1,\ \lambda = \frac{\Delta\tau}{\Delta x^2}$
$\tau_k = (k-1)\Delta\tau\ \forall\, 1 \leq k \leq m+1,\ x_j = -a + (j-1)\Delta x\ \forall\, 1 \leq j \leq n+1$
zerlege Matrix $\hat{A}$ aus (2.18) in die Matrizen L und U

Anfangswerte:
$f(x,\tau) = exp\Big(\frac{1}{2}(q_\delta - 1)x + \frac{1}{4}(q_\delta - 1)^2\tau + q\tau\Big)$
$w^{(1)} = \Big(f(x_2, 0), \ldots, f(x_n, 0)\Big)$

Randwerte:
euro. Put: $w_1^{(k)} = exp\Big(\frac{1}{2}(q_\delta - 1)a + \frac{1}{4}(q_\delta - 1)^2\tau_k\Big), \quad w_{n+1}^{(k)} = 0$
euro. Call: $w_1^{(k)} = 0, \quad w_{n+1}^{(k)} = exp\Big(\frac{1}{2}(q_\delta + 1)a + \frac{1}{4}(q_\delta + 1)^2\tau_k\Big)$

for $k = 1 : m-1$ do
  $c = \hat{B}w^{(k)} + d^{(k)}$
  $Lz = c$
  $Ux = z$
  $w^{(k+1)} = x$
end

Abbildung 5.1: Kernalogorithmus für europäische Optionen

Am Ende des Algorithmus 5.1 steht noch die Rücktransformation der Wärmeleitungsgleichung in die Black-Scholes-Gleichung an.

[3] Weniger aufwendige und damit ungenauere numerische Berechnungsverfahren für die Black-Scholes-Formeln finden sich in [GünJüng03] S.63-73.
[4] Der LU-Algorithmus entstammt aus [Sey00] S.75-76 und ist auf das Problem der europäischen Optionen zugeschnitten.
[5] [Sey00] S.91.

$0 \leq \vartheta \leq 1,\ \lambda = \frac{\Delta\tau}{\Delta x^2}$
$d_1 = 1 + 2\lambda\vartheta$
`for` $j = 1 : l - 2$ `do`
    $r_j = -\lambda\vartheta$
    $l_j = -\lambda\vartheta / d_j$
    $d_{j+1} = (1 + 2\lambda\vartheta) - l_j\ r_j$
`end`
$z_1 = d_1$
`for` $j = 2 : l - 1$ `do`
    $z_j = d_j - l_{j-1}\ z_{j-1}$
`end`
$x_n = \frac{z_n}{d_n}$
`for` $j = l - 2 : -1 : 1$ `do`
    $w_j^{(k)} = \left(z_j - r_j\ x_{j+1}\right) / d_j$
`end`

Abbildung 5.2: LU-Zerlegung

5.2.2 Der europäische Call

Die punktweise berechneten numerischen Optionspreise befinden sich in der Tabelle 5.2. Die Auswertung findet immer am selben Gitterpunkt, aber zu unterschiedlich tiefen Gittermaschenweiten statt. Dahinter verbirgt sich der anisotrope Gitteransatz. Die Zeilen- und Spaltenköpfe tragen die Zweierpotenz der Gittermaschenweite. D.h. steht z.B. im Zeilen- und Spaltenkopf eine 3, dann wird ein Gitter betrachtet mit einer Gittermaschenweite von $h = 2^{-3}$ in beide Richtungen mit $(2^3 - 1)^2 = 49$ Unbekannten u.s.w. Deutlich zu erkennen ist aus der Tabelle 5.2, dass von links unten und rechts oben punktweise der numerisch berechnete Funktionswert gegen den exakten Funktionswert strebt. Bei diesem Verhalten spricht man von der ausbalancierten Wirkung der Option.

	3	4	5	6	7	8	9	10
3	**1.29678526**	0.74928889	0.61326267	0.57932185	0.57084094	0.56872098	0.56819101	0.56805852
4	0.76581908	**0.28940505**	0.17245973	0.14338286	0.13612390	0.13430979	0.13385631	0.13374294
5	0.63889320	0.18165671	**0.06985100**	0.04208405	0.03515422	0.03342245	0.03298954	0.03288131
6	0.60758134	0.15522862	0.04473097	**0.01729731**	0.01045132	0.00874055	0.00831287	0.00820595
7	0.59978055	0.14865437	0.03848517	0.01113519	**0.00431024**	0.00260479	0.00217844	0.00207184
8	0.59783207	0.14701287	0.03692588	0.00959684	0.00277714	**0.00107301**	0.00064703	0.00054052
9	0.59734506	0.14660262	0.03653619	0.00921239	0.00239401	0.00069021	**0.00026431**	0.00015783
10	0.59722331	0.14650007	0.03643877	0.00911628	0.00229823	0.00059451	0.00016863	**0.00006217**

Tabelle 5.1: Relativer (punktweiser) Fehler beim europäischen Call. Die Parameter lauten: $K = 10.0,\ a = 12,\ T = 10.0,\ S = 10$ und $t = 0,\ r = 0.25,\ \delta = 0.2$ sowie $\sigma = 3$.

Die relativen Fehler der numerisch berechneten Ergebnisse zum bekannten exakten Lösungswert 1.35335062 aus der geschlossenen Lösungsformel (2.9), S.13 können aus der Tabelle 5.1 abgelesen werden.

	3	4	5	6	7	8	9	10
3	**3.10835576**	2.36740120	2.18331003	2.13737620	2.12589856	2.12302952	2.12231228	2.12213297
4	2.38977235	**1.74501712**	1.58674910	1.54739790	1.53757398	1.53511886	1.53450514	1.53435171
5	2.21799713	1.59919584	**1.44788352**	1.41030510	1.40092661	1.39858291	1.39799703	1.39785057
6	2.17562121	1.56342938	1.41388731	**1.37675994**	1.36749493	1.36517965	1.36460085	1.36445614
7	2.16506400	1.55453210	1.40543455	1.36842044	**1.35918388**	1.35687581	1.35629882	1.35615455
8	2.16242702	1.55231058	1.40332428	1.36633851	1.35710907	**1.35480278**	1.35422628	1.35408213
9	2.16176792	1.55175537	1.40279689	1.36581821	1.35659055	1.35428471	**1.35370832**	1.35356422
10	2.16160316	1.55161658	1.40266506	1.36568815	1.35646093	1.35415520	1.35357884	**1.35343475**

Tabelle 5.2: Punktweise Kovergenz: Der Vergleichswert der exakten Lösung beträgt 1.35335062.

Um die Wirkungsweise der *Kombinationstechnik* besser verstehen zu können betrachte man sich die Tabelle 5.3. Die erste Spalte hält den aktuellen Level fest, die zweite Spalte sammelt die punktweise Lösung bis zum aktuellen Level. In der dritten Spalte steht die Anzahl der Unbekannten, die bis zum aktuellen Level gelöst werden müssen. Die vierte Spalte gibt die Fehlerentwicklung unter Verwendnung der *Kombinationstechnik* an. Vorletzte und letzte Spalten vermerken die Konvergenz der Kombinationstechnik bzw. der Vollgittertechnik.

n	$\sum\limits_{\lvert l\rvert=n+1} V_l - \sum\limits_{\lvert l\rvert=n} V_l$	DOF	$error_n^C$	Konvergenzordnung der Kombinationslösung	Konvergenzordnung der Vollgitterlösung
5	3.10835576	258	1.29678526		
6	1.64881778	642	0.21832270	5.93976375	4.48086603
7	1.38915073	1538	0.02645295	7.00159486	4.30871450
8	1.35261806	3586	0.00054128	13.3807984	4.21660738
9	1.35073100	8194	0.00193565	5.08756895	4.16477604
10	1.35208167	18434	0.00093763	4.24783182	4.13478430
11	1.35287571	40962	0.00035090	3.93200549	4.12216854
12	1.35318843	90114	0.00011983	3.76989218	4.14038787

Tabelle 5.3: Konvergenztabelle des europäischen Calls.

Die Anzahl der Unbekannten für die *Kombinationstechnik* im zweidimensionalen Raum berechnen sich aus den Formeln (5.2) und (5.5). Der Level n der ersten Spalte ergibt sich über die Formel (5.1). Wenn z.B. $n = 5$ ist, kann $l_1 = l_2 = 3$ sein. Dies entspricht der Zelle mit dem Tabellenkopf 3 für die Zeile und Spalte aus der Tabelle 5.2. In beiden Richtungen wurde mit einer Gittermaschenweite von $h = 2^{-3}$ gearbeitet. Die Einträge der zweiten Spalte aus der Tabelle 5.3 ergeben sich, indem die reflektierenden Sub- und Superdiagonalen der Tabelle 5.2 zum aktuellen Levelnivaeu n addiert und subtrahiert worden sind. Die letzte Spalte in Tabelle 5.3 verdeutlicht die quadratische Konvergenzordnung des Crank-Nicolson-Verfahrens. Wird die Gittermaschenweite halbiert, dann viertelt sich der Fehler. Siehe dazu die Formel (2.20) auf S.20. Je größer die Leveltiefe gewählt wurde, um so näher befindet man sich an dem exakten Lösungswert. Mittels der $\varepsilon-$Komplexität wird das numerische Fehlerintervall aus Tabelle 5.3 $0.00011983 \leq \varepsilon \leq 0.00035090$ in der Tabelle 5.1 für die relativen Fehler gesucht. In etwa müssen für diesem Fehlerintervall auf Dünngittern 40962 bis 90114 Unbekannte gelöst werden. Im Vergleich dazu müssten auf den Vollgittern für denselben Fehlertoleranzbereich zwischen $(2^9 - 1)^2$ und $(2^{10} - 1)^2$ bzw. 261121 und 1046529 Unbekannte gelöst werden. Die Einsparung an Freiheitsgraden hat man der *Kombinationstechnik* zu verdanken.

Abschließend werden zu den europäischen Optionen Abbildungen betrachtet, die den Optionsverlauf verdeutlichen sollen. Schaut man sich die Abbildung 5.3 (links) an, erkennt man, dass für sehr kleine Fälligkeitstermine T, z.B. $T = 0.01$, der Knick auch in $t = 0$ erhalten bleibt. Dies geht auch aus der Abbildung 5.4 (links) hervor. Das muss automatisch zu einer schlechteren Approximation der Differentialoperatoren führen, da die Singularität sich vergrößert und ihren Einfluss damit über das gesamte Gebiet streuen kann. Der Abbildung 5.3 (rechts) entnimmt man den Kurvenverlauf des Optionspreises zu den Zeitpunkten $t \in \{0, \frac{T}{2}, T\}$ mit $T = 1$. Der Wert der Option steigt von $t = 0$ bis $t = T$ für steigende Aktienkurse an.

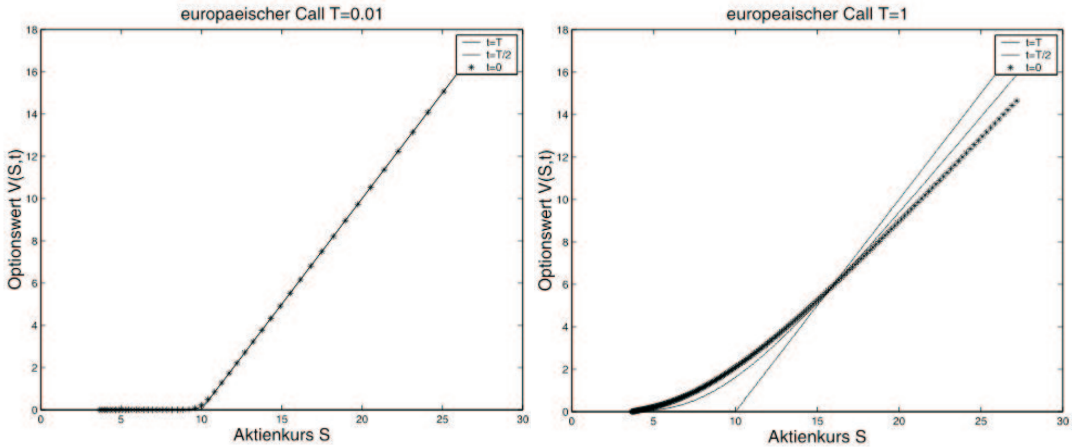

Abbildung 5.3: Europäische Call-Optionen in Seitenansichten zu folgenden Daten: $n = m = 50$, $S = K = 10.0$, $a = 1$, $r = 0.05$; $\sigma = 0.6$, $\delta = 0.2$, $\vartheta = 0.5$. Links gilt $T = 0.01$ und rechts $T = 1$.

Aus der Abbildung 5.4 kann in Flächenansicht der Verlauf des Preises einer europäischen Call-Option verfolgt werden. Dabei lässt sich der Optionspreis zu allen Kursen und Zeiten ablesen. Für die rechte Abbildung in 5.4 mit $T = 1$ ist deutlich der "Knick" für $K = S$ zu erkennen. Dies ist die Stelle, an der die Funktion stetig, aber nicht differenzierbar ist. Es können unendlich viele Tangenten an diesem Punkt angelegt werden. Die linke Abbildung aus 5.4 scheint diesen Knick über alle Zeiten für $S = K$ zu halten, da der Fälligkeitstermin der Option in zeitlicher Nähe zum Startzeitpunkt der Option liegt. Das Finite Differenzen-Verfahren hat Schwierigkeiten an diesen "Knickstellen", den Differentialoperator der Wärmeleitungsgleichung richtig zu approximieren. Dies führt auf die Frage zurück, inwieweit die $T-$Wahl die Wirkung der Kombinationstechnik beeinflusst. Eine Beantwortung dieser Frage erfolgt im nächsten Abschnitt.

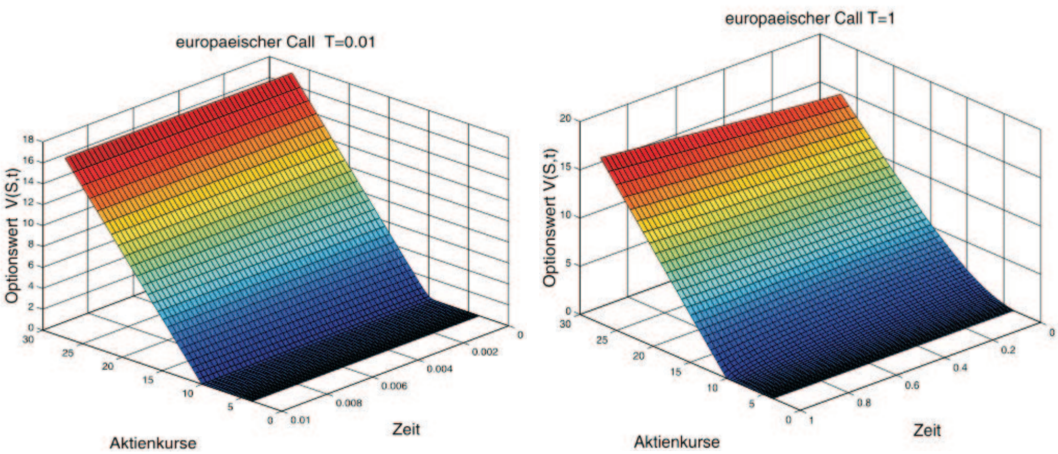

Abbildung 5.4: Europäische Call-Optionen in Flächenansichten zu folgenden Daten: $n = m = 50$, $S = K = 10.0$, $a = 1$, $r = 0.05$; $\sigma = 0.6$, $\delta = 0.2$, $\vartheta = 0.5$. Links gilt $T = 0.01$ und rechts $T = 1$.

5.2.3 Schranken des Verfahrens für europäische Optionen

Durch empirische Tests konnte festgestellt werden, dass die *Kombinationstechnik* besonders auf die Parameterwahl der Zeitdauer bzgl. der Option sehr sensitiv reagiert. Dies ist auch auf der linken Seite der Abbildung 5.3 zu beobachten. Durch Tests wurde ermittelt dass für $T \approx 0$ nach unten hin eine Schranke vorliegt, bei der die *Kombinationstechnik* gerade noch funktioniert. Nach oben hin scheint die *Kombinationstechnik* auch noch für sehr große Werte von T zu funktionieren. Die Begründung ist darin zu sehen, dass für eine sehr kleine Laufzeitdauer $T \approx 0$ die Singularität an der "Knickstelle" der Option (Auszahlungsfunktion zum Zeitpunkt T) sehr stark ausgeprägt ist. Die Auswirkungen von T überstrahlen den ganzen zulässigen Bereich, wie an den Abbildungen 5.3 (links) und 5.4 (links) zu erkennen ist. Erst mit großen Werten von T kann die Singularität gedämpft bzw. geglättet werden und bekommt somit einen glatteren Kurvenverlauf. Am Beispiel einer europäischen Call-Option mit $T = 0.01$ und ansonsten gleichen Parametern, wie bei dem funktionierenden Fall aus Abschnitt 5.2.2, soll der Effekt veranschaulicht werden.

	3	4	5	6	7	8	9	10
3	**0.74511233**	0.59323611	0.32373271	0.08704109	0.01859618	0.00436814	0.00966589	0.02242597
4	0.74511255	**0.59324098**	0.32383045	0.08755732	0.01899323	0.00454483	0.00115128	0.00469945
5	0.74511261	0.59324220	**0.32385487**	0.08768600	0.01909323	0.00463598	0.00113028	0.00031745
6	0.74511262	0.59324251	0.32386097	**0.08771814**	0.01911828	0.00465880	0.00115267	0.00028221
7	0.74511263	0.59324258	0.32386249	0.08772618	**0.01912454**	0.00466451	0.00115827	0.00028778
8	0.74511263	0.59324260	0.32386288	0.08772819	0.01912611	**0.00466594**	0.00115967	0.00028917
9	0.74511263	0.59324261	0.32386297	0.08772869	0.01912650	0.00466629	**0.00116002**	0.00028952
10	0.74511263	0.59324261	0.32386299	0.08772882	0.01912660	0.00466638	0.00116011	**0.00028961**

Tabelle 5.4: Relativer (punktweiser) Fehler beim europäischen Call. Die Parameter lauten: $S = K = 10.0,\ a = 10,\ T = 0.01$ und $t = 0,\ r = 0.25,\ \delta = 0.2$ sowie $\sigma = 4$.

Die relativen Fehler der numerisch berechneten Ergebnisse zum bekannten exakten Lösungswert 1.58412716140958 aus der geschlossen Lösungsformel (2.10), S.14 können aus der Tabelle 5.4 abgelesen werden. Die Tabelle 5.5 trägt die numerisch berechneten Optionspreise.

	3	4	5	6	7	8	9	10
3	**0.40377448**	0.64436573	1.07129338	1.44624301	1.55466844	1.57720747	1.56881516	1.54860158
4	0.40377413	**0.64435800**	1.07113855	1.44542523	1.55403948	1.57692758	1.58230339	1.57668263
5	0.40377404	0.64435607	**1.07109987**	1.44522139	1.55388106	1.57678317	1.58233665	1.58362428
6	0.40377402	0.64435559	1.07109021	**1.44517047**	1.55384138	1.57674703	1.58230119	1.58368011
7	0.40377401	0.64435547	1.07108779	1.44515774	**1.55383146**	1.57673799	1.58229232	1.58367128
8	0.40377401	0.64435544	1.07108718	1.44515456	1.55382897	**1.57673573**	1.58229010	1.58366907
9	0.40377401	0.64435543	1.07108703	1.44515376	1.55382835	1.57673516	**1.58228954**	1.58366852
10	0.40377401	0.64435543	1.07108700	1.44515356	1.55382820	1.57673502	1.58228941	**1.58366838**

Tabelle 5.5: Punktweiser Wert: Der Vergleichswert der exakten Lösung beträgt 1.58412716140958.

Das Fehlerintervall $0.00997626726722 \leq \varepsilon \leq 0.01403598577524$ der *Kombinationstechnik* auf dem Dünngitter findet sich auf dem Vollgitter, dargestellt in der Tabelle 5.4, bei einer Auflösung zwischen $(2^7 - 1)^2 = 16129$ und $(2^8 - 1)^2 = 65025$ Unbekannten, wieder. Damit kann dasselbe Fehlerintervall auf dem Vollgitter mit weniger Unbekannten gelöst werden als auf dem entsprechenden Dünngitter, welches zwischen 40962 und 90114 Unbekannte zum Lösen des Gleichungssystems benötigt. Somit erweist sich die *Kombinationstechnik* für sehr kleine Fälligkeitstermine $T \approx 0$ als ungeeignet. Die letzten beiden Spalten der Tabelle 5.6 liegen deutlich unterhalb einer quadratischen Konvergenzordnung.

n	$\sum\limits_{\lvert l\rvert=n+1} V_l - \sum\limits_{\lvert l\rvert=n} V_l$	DOF	$error_n^C$	Konvergenzordnung der Kombinationslösung	Konvergenzordnung der Vollgitterlösung
5	0.40377448	258	0.74511232		
6	0.64436537	642	0.59323633	1.25601263	1.25600279
7	1.07128556	1538	0.32373764	1.51710023	1.51682563
8	1.44608622	3586	0.08714006	2.04488064	2.04037868
9	1.55381149	8194	0.01913714	2.49796402	2.49837535
10	1.57636487	18434	0.00490003	2.73152136	2.75839540
11	1.56832348	40962	0.00997626	2.05214951	2.93737489
12	1.56189237	90114	0.01403598	1.76370348	3.07044392

Tabelle 5.6: Konvergenztabelle des europäischen Calls.

Die nicht monotone Fehlerentwicklung in der Tabelle 5.6, vierte Spalte, ist zulässig, weil in der theoretischen Betrachtung an keiner Stelle von einer monotonen Fehlerentwicklung ausgegangen wurde.

5.2.4 Der europäische Put

Für den europäischen Put gelten in etwa die gleichen Ergebnisse und Aussagen wie für den europäischen Call. Die Tabelle 5.8 trägt die numerischen Lösungen der Finiten Differenzen für europäische Optionen unter Verwendung der Vollgittertechnik. Bei der Konvergenz wurde auf die Glättung der Reduktionsfaktoren gesetzt, um die Konvergenzordnung besser zu veranschaulichen. Für ein rechtwinkliges Gitter können die numerisch berechneten Optionspreise aus der Tabelle 5.8 abgelesen werden.

	3	4	5	6	7	8	9	10
3	**1.16553948**	0.66797213	0.54397831	0.51301269	0.50527343	0.50333875	0.50285509	0.50273417
4	0.70296435	**0.26358612**	0.15522087	0.12823959	0.12150122	0.11981704	0.11939602	0.11929077
5	0.59175801	0.16805643	**0.06389717**	0.03798830	0.03151943	0.02990262	0.02949843	0.02939739
6	0.56427514	0.14456503	0.04147620	**0.01584016**	0.00944003	0.00784045	0.00744053	0.00734054
7	0.55742504	0.13871733	0.03589729	0.01032976	**0.00394684**	0.00235168	0.00195287	0.00185314
8	0.55571382	0.13725699	0.03450422	0.00895383	0.00257523	**0.00098114**	0.00058266	0.00048301
9	0.55528609	0.13689200	0.03415606	0.00860996	0.00223243	0.00063861	**0.00024020**	0.00014059
10	0.55517916	0.13680076	0.03406903	0.00852399	0.00214673	0.00055299	0.00015459	**0.00005499**

Tabelle 5.7: Relativer (punktweiser) Fehler beim europäischen Put. Die Parameter lauten: $S = K = 10.0$, $a = 12$, $T = 10.0$ und $t = 0$, $r = 0.25$, $\delta = 0.2$ sowie $\sigma = 3$.

Die relativen Fehler der numerisch berechneten Ergebnisse, zum bekannten exakten Lösungswert 0.82084777 aus der geschlossen Lösungsformel (2.10) Kapitel 2, können aus der Tabelle 5.7 abgelesen werden. Liest man die untere Zeile und die letzte Spalte, stellt man fest, dass sich die numerisch berechneten Funktionswerte gegen den exakten Funktionswert 0.82084777 schmiegen. Dieses Verhalten kennzeichnet die ausbalancierte Wirkung der Put-Option.

	3	4	5	6	7	8	9	10
3	**1.77757826**	1.36915121	1.26737116	1.24195310	1.23560035	1.23401227	1.23361525	1.23351600
4	1.39787450	**1.03721186**	0.94826048	0.92611296	0.92058178	0.91919933	0.91885374	0.91876734
5	1.30659102	0.95879652	**0.87329762**	0.85203038	0.84672043	0.84539327	0.84506150	0.84497855
6	1.28403177	0.93951366	0.85489342	**0.83385013**	0.82859660	0.82728359	0.82695532	0.82687324
7	1.27840888	0.93471359	0.85031399	0.82932693	**0.82408753**	0.82277814	0.82245078	0.82236892
8	1.27700422	0.93351487	0.84917049	0.82819751	0.82296164	**0.82165314**	0.82132605	0.82124425
9	1.27665313	0.93321527	0.84888470	0.82791524	0.82268026	0.82137198	**0.82104494**	0.82096318
10	1.27656536	0.93314037	0.84881326	0.82784468	0.82260992	0.82130169	0.82097467	**0.82089291**

Tabelle 5.8: Punktweiser Wert: Der Vergleichswert der exakten Lösung beträgt 0.82084777.

n	$\sum_{\lvert l\rvert=n+1} V_l - \sum_{\lvert l\rvert=n} V_l$	DOF	$error_n^C$	Konvergenzordnung der Kombinationslösung	Konvergenzordnung der Vollgitterlösung
5	1.77757826	258	1.16553948		
6	0.98944744	642	0.20539700	5.67456915	4.42185453
7	0.84414831	1538	0.02838594	6.40754334	4.27093225
8	0.82186784	3586	0.00124270	9.78859207	4.19040315
9	0.81989158	8194	0.00116488	5.62420898	4.14542790
10	0.82030219	18434	0.00066464	4.45438860	4.12058807
11	0.82063146	40962	0.00026351	4.05155415	4.11458145
12	0.82077053	90114	0.00009410	3.84330930	4.14987249

Tabelle 5.9: Konvergenztabelle des europäischen Puts.

Bei der *Kombinationstechnik* gibt man sich das Fehlerintervall $0.00026351 \leq \varepsilon \leq 0.00009410$ aus Tabelle 5.9 vor. Für dieses Intervall müssen 40962 bis 90114 Unbekannte gelöst werden. Sucht man den Toleranzbereich in der Tabelle 5.7 für die relativen Fehler auf dem Vollgitter, stellt man fest, dass zwischen 261121 und 1046529 Unbekannte gelöst werden müssen, um auf denselben Fehlertoleranzbereich zu kommen. Das Einsparpotential der *Kombinationstechnik* ist somit enorm. Die Anzahl der Unbekannten für die *Kombinationstechnik* im zweidimensionalen Fall berechnen sich aus den Formeln (5.2) und (5.5). Die vorletzte Spalte in Tabelle 5.9 zeigt die Dämpfung durch die *Kombinationstechnik*. Die quadratische Konvergenz, ablesbar in der letzten Spalte, wird in der Theorie logarithmisch abgedämpft. Aus diesem Grunde liegt die Konvergenz der *Kombinationstechnik* unter der Konvergenz des Crank-Nicolson-Verfahrens.

5.3 Zweidimensionale Probleme bei amerikanischen Optionen

5.3.1 Der Kernalgorithmus für amerikanische Optionen

Durch das Hindernisproblem ergeben sich andere numerische Verhaltensweisen der amerikanischen Optionen, die sich auf das Verhalten der *Kombinationstechnik* auswirken. So kann z.B. keine Monotonie der Fehlerentwicklung gezeigt werden. Dazu schaue man sich die Fehlerspalte $error_n$ der Tabellen 5.13 und 5.16 an. Ansatz und Methodik des Testverfahrens entsprechen dem der europäischen Optionen. Es folgen die empirischen Resultate für die amerikanischen Optionen. Bei amerikanischen Optionen wird zur besseren Nachvollziehbarkeit der Konvergenz die Glättung der Fehlerreduktion mit der Formel (5.6) vorgenommen. Die punktweise Optionspreisberechnung fließt in die *Kombinationstechnik* mit ein. Der verwendetete Algorithmus soll im Folgenden beschrieben werden.

Algorithmus 5.2 (Algorithmus zur Berechnung von amerikanischen Optionen)**.**
Im Unterschied zu den europäischen Optionen betrachten wir statt eines linearen Gleichungssystems ein Ungleichungssystem. Die Randwerte der europäischen Optionen sind fix. Der Aufsprungspunkt der amerikanischen Option auf die Auszahlungsfunktion ist dagegen variabel. Um das Ungleichungssystem numerisch lösen zu können, bedarf es des Einsatzes des Projektions-SOR-Iterationsverfahrens.

Der Grundalgorithmus für amerikanische Optionen lautet in Kurzdarstellung:

1. Definiere $f_j^{(k)} := f(x_j, \tau_k)$ gemäß (2.24), S.22.
2. Definiere die Randwerte $\tilde{w}_1^{(k)} = f_1^{(k)}$ und $\tilde{w}_{n+1}^{(k)} = f_{n+1}^{(k)}$.

3. Definiere $b_j^{(k)} = (\hat{B}\hat{w}^{(k)} + g^{(k)})_j$ gemäß (2.19), S.18 und (2.25) - (2.27), S.22.
4. Berechne $z_j^{(k)}$ und $w_j^{(k+1)}$ gemäß (2.30), S.24 solange, bis die Konvergenz erreicht ist.
5. Transformiere zurück in die Originalvariablen.

$0 \le \vartheta \le 1,\ 1 \le \omega < 2,\ a, m, n$ groß und ε sehr klein
$\Delta x = \frac{2a}{n}, \quad \Delta\tau = \frac{\frac{1}{2}\sigma^2 T}{m},\ x_j := -a + (j-1)\Delta x \ \forall\ 1 \le j \le n+1$

Anfangswerte:
initialisiere mit $w^{(1)} = f(x, 0)$
am. Put: $f(x,\tau) = exp\Big(\frac{1}{4}(q_\delta - 1)^2 + 4q)\tau\Big)\Big(e^{\frac{1}{2}(q_\delta - 1)x} - e^{\frac{1}{2}(q_\delta + 1)x}\Big)^+$
am. Call: $f(x,\tau) = exp\Big(\frac{1}{4}(q_\delta - 1)^2 + 4q)\tau\Big)\Big(e^{\frac{1}{2}(q_\delta + 1)x} - e^{\frac{1}{2}(q_\delta - 1)x}\Big)^+$

Randwerte:
am. Put $w_1^{(k)} = exp\Big(\frac{1}{2}(-q_\delta - 1)x + \frac{1}{4}(q_\delta - 1)^2\tau - q\ \tau\Big)(1 - e^a), \quad w_{n+1}^{(k)} = 0$
am. Call $w_1^{(k)} = 0, \quad w_{n+1}^{(k)} = exp\Big(\frac{1}{2}(q_\delta - 1)x + \frac{1}{4}(q_\delta - 1)^2\tau + q\ \tau\Big)(e^a - 1)$

`for` $k = 2 : m+1$ `do`
  $\tau_k = (k-1)\Delta\tau$
  $b_1^{(k)} = w_2^{(k)} + \lambda(1-\vartheta)(w_3^{(k)} - 2w_2^{(k)} + f_1^{(k)}) + \lambda\vartheta f_{m-1}^{(k)}$
  $b_j^{(k)} = w_j + \lambda(1-\vartheta)(w_{j+1}^{(k)} - 2w_j^{(k)} + w_{j-1}^{(k)})$
  $b_{n+1}^{(k)} = w_{n-1}^{(k)} + \lambda(1-\vartheta)(f_{m-1}^{(k)} - 2w_{m-2}^{(k)} + w_{m-3}^{(k)}) + \lambda\vartheta f_1^{(k)}$
`end`

`for` $k = 1 : m-1$ `do`
  `while` $||v^{(k+1)} - v^{(k)})||_2 > \varepsilon$ *do*
    $z_j^{(k)} = \frac{1}{2\lambda\vartheta}\Big(\lambda\vartheta(w_{j-1}^{(k+1)} + w_{j+1}^{(k)}) + b_j\Big)$
    $w_j^{(k+1)} = \max\{w_j^{(k+1)} + \omega(z_j^{(k)} - w_j^{(k)}), f_j^{(k)}\}$
  end
`end`

Bei diesem Projektions-SOR-Iterationsverfahren hilft es nur, die Fehlerschranke sehr scharf zu stellen, sonst konvergiert das Verfahren nicht. Betrachtet wird jeweils eine amerikanische Put- und Call-Option. Die Werte in der Tabelle 5.10 sind ausschließlich durch die Auflösung beeinflusst und nicht durch die gewählte Fehlerschranke $\varepsilon = 10^{-20}$. Die Fehlerschranke wurde bei allen Auflösungen gleichermaßen gewählt. Die Ergebnisse entstammen dem ausgeführten Programm für amerikanische Optionen und decken sich mit den Resultaten aus [Sey04] S.143.

Auflösung	numerisches Punktergebnis des Puts	numerisches Punktergebnis des Calls
$m = n = 200$	1.88003680548986	2.18577101506542
$m = n = 400$	1.88126756743948	2.18690627570976
$m = n = 800$	1.88158418458876	2.18718937733136
$m = n = 1600$	1.88166512185930	2.18725988513980

Tabelle 5.10: $\sigma = 0.6,\ r = 0.25,\ \delta = 0.2,\ K = 10,\ T = 1,\ a = 2,\ t = 0,\ \varepsilon = 10^{-20}$

5.3.2 Der amerikanische Call

Wir geben uns direkt einen Gitterpunkt ($S = K,\ t = 0$) auf dem isotropen und feinen Vollgitter vor, den wir in allen gröberen Gittern wiederfinden. Da wir keine geschlossene Lösungsformel vorgeben können, muss die Lösung auf einem sehr feinen und isotropen Referenzvollgitter bestimmt werden. Hinreichend für die Zuverlässlichkeit der Referenzlösung ist eine Gittermaschenweite von $h = 2^{-11}$ in beide Richtungen. Die Optionspreise in dem gleichen Gitterpunkt auf den anisotropen und gröberen Dünngittern können der Tabelle 5.12 entnommen werden. Die korrespondierenden relativen Fehler in demselben Gitterpunkt auf den Dünngittern stehen in der Tabelle 5.11.

	3	4	5	6	7	8	9	10
3	**0.53133035**	0.18370119	0.13434791	0.12132831	0.11891979	0.11814246	0.11794794	0.11790087
4	0.25836760	**0.08574476**	0.04143095	0.03115552	0.02997541	0.02925292	0.02907209	0.02904404
5	0.23414833	0.05963587	**0.02110512**	0.01046244	0.00775381	0.00747048	0.00729295	0.00724854
6	0.22798979	0.05299991	0.01591778	**0.00521782**	0.00249449	0.00198676	0.00185134	0.00181654
7	0.22644370	0.05133401	0.01461416	0.00389978	**0.00117271**	0.00060880	0.00050073	0.00045689
8	0.22605685	0.05091710	0.01428783	0.00356983	0.00084183	**0.00026385**	0.00016264	0.00011883
9	0.22596016	0.05081284	0.01420622	0.00348732	0.00075908	0.00017758	**0.00007808**	0.00003428
10	0.22593601	0.05078678	0.01418582	0.00346669	0.00073839	0.00015601	0.00005693	**0.00001314**

Tabelle 5.11: Relativer (punktweiser) Fehler beim amerikanischen Call mit folgenden Parametern: $S = K = 10.0,\ a = 13,\ T = 15$ und $t = 0,\ r = 0.25,\ \delta = 0.2$ sowie $\sigma = 2$.

Bei der Tabelle für die relativen Fehler wurde darauf geachtet, eine Ausbalancierung der numerischen Fehler zu erhalten, d.h. der numerische Fehler in der ersten Spalte, letzte Zeile und der numerische Fehler letzte Spalte, erste Zeile starten ungefähr vom selben Fehlerniveau und streben bei der Zunahme der Gitterfeinheit gegen den gleichen numerischen Fehler 0.00001314 auf dem feinsten Vollgitter mit jeweils 1048575 Diskretisierungen in Zeit- und Kursrichtung.

	3	4	5	6	7	8	9	10
3	**11.23239753**	8.68251732	8.32050811	8.22500860	8.20734199	8.20164020	8.20021341	8.19986811
4	9.23019983	**7.96400119**	7.63895678	7.56358593	7.55492976	7.54963024	7.54830385	7.54809812
5	9.05255006	7.77249097	**7.48986565**	7.41180095	7.39193303	7.38985480	7.38855256	7.38822687
6	9.00737679	7.72381583	7.45181619	**7.37333135**	7.35335558	7.34963134	7.34863804	7.34838282
7	8.99603612	7.71159631	7.44225411	7.36366346	**7.34366026**	7.33952396	7.33873127	7.33840968
8	8.99319858	7.70853826	7.43986046	7.36124331	7.34123323	**7.33699374**	7.33625132	7.33593000
9	8.99248935	7.70777355	7.43926185	7.36063807	7.34062627	7.33636095	**7.33563107**	7.33530985
10	8.99231220	7.70758236	7.43911219	7.36048675	7.34047452	7.33620270	7.33547598	**7.33515478**

Tabelle 5.12: Punktweiser Wert: Der Vergleichswert beträgt 7.33505837 bei einer Gittermaschenweite von 2^{-11} in beide Richtungen.

Die Anzahl der Unbekannten für die *Kombinationstechnik* im zweidimensionalen Fall berechnen sich aus den Formeln (5.2) und (5.5). Die vorletzte und letzte Spalte der Tabelle 5.13 stellen die Konvergenz der *Kombinationstechnik* gegenüber der Vollgittertechnik dar.

n	$\sum_{\lvert l\rvert=n+1} V_l - \sum_{\lvert l\rvert=n} V_l$	DOF	$error_n^C$	Konvergenzordnung der Kombinationslösung	Konvergenzordnung der Vollgitterlösung
5	11.23239753	258	0.53133035		
6	6.68031962	642	0.08926155	5.95251090	6.19665096
7	7.42434220	1538	0.01217220	6.60690058	5.01751175
8	7.30677378	3586	0.00385608	5.16503017	4.66973078
9	7.33681238	8194	0.00023912	6.86573727	4.61363782
10	7.34433646	18434	0.00126489	3.34705133	4.57932540
11	7.33340776	40962	0.00022502	3.64914049	4.35315505
12	7.33660225	90114	0.00021047	3.06213911	4.55103205

Tabelle 5.13: Konvergenztabelle des amerikanischen Calls.

Betrachtet man den vorliegenden Fehlertoleranzbereich $0.00021047 \leq \varepsilon \leq 0.0002250$ aus Tabelle 5.13, liest man ab, dass zwischen 40962 und 90114 Unbekannte auf dem Dünngitter für diese Fehlertoleranz berechnet werden müssen. Die Einträge der zweiten Spalte der Tabelle 5.3 ergeben sich, indem die gespiegelten Super- und Subdiagonalen der Tabelle 5.2 zum aktuellen Levelnivaeu n subtrahiert und addiert worden sind. Die relativen Fehler der Vollgittertechnik können aus Tabelle 5.12 abgelesen werden. Dabei kann festgestellt werden, dass für den gleichen Fehlertoleranzbereich, wie bei der Kombinationstechnik, zwischen $(2^8-1)^2 \times (2^9-1)^2$ bzw. 65025×261121 Unbekannte gelöst werden müssen. Damit ist die Verringerung des numerischen Rechenaufwandes bei der Verwendung der *Kombinationstechnik* für amerikanische Call-Optionen empirisch bestätigt worden.

5.3.3 Der amerikanische Put

Der Gitterpunkt $(S = K,\ t = 0)$ wird auf dem hochaufgelösten Vollgitter mit einer Gittermaschenweite von $h = 2^{-11}$ in beiden Richtungen fixiert, um die Referenzlösung des amerikanischen Put-Preises von 6.91115456 vorzugeben. Die relatvien Fehler sind in der Tabelle 5.14 enthalten.

	3	4	5	6	7	8	9	10
3	**0.26352643**	0.09718976	0.06738417	0.05725240	0.05466883	0.05401934	0.05388974	0.05386672
4	0.21597102	**0.04589459**	0.02685995	0.01630922	0.01385708	0.01370338	0.01353955	0.01350536
5	0.20366440	0.03263276	**0.01629550**	0.00563192	0.00404517	0.00343558	0.00342445	0.00338337
6	0.20056053	0.02928892	0.01362606	**0.00293303**	0.00156275	0.00093447	0.00088810	0.00084629
7	0.19978284	0.02845117	0.01295691	0.00225649	**0.00093996**	0.00031205	0.00025377	0.00021216
8	0.19958831	0.02824163	0.01278952	0.00208724	0.00078415	**0.00015612**	0.00009469	0.00005429
9	0.19953967	0.02818923	0.01274766	0.00204492	0.00074520	0.00011713	**0.00005480**	0.00001462
10	0.19952751	0.02817613	0.01273720	0.00203434	0.00073546	0.00010739	0.00004483	**0.00000464**

Tabelle 5.14: Relativer (punktweiser) Fehler beim amerikanischen Put mit folgenden Parametern: $S = K = 10.0,\ a = 13,\ T = 10.75,$ und $t = 0,\ r = 0.25,\ \delta = 0.2$ sowie $\sigma = 3$.

Die numerisch berechneten amerikanischen Put-Optionspreise auf den gröberen Gittern, zum selben Gitterpunkt, können aus der Tabelle 5.15 abgelesen werden.

	3	4	5	6	7	8	9	10
3	**8.73242646**	7.58284804	7.37685698	7.30683477	7.28897930	7.28449059	7.28359490	7.28343583
4	8.40376364	**7.22833919**	7.09678780	7.02387014	7.00692302	7.00586072	7.00472846	7.00449220
5	8.31871074	7.13668459	**7.02377532**	6.95007766	6.93911137	6.93489838	6.93482147	6.93453754
6	8.29725938	7.11357484	7.00532638	**6.93142518**	6.92195494	6.91761280	6.91729239	6.91700341
7	8.29188466	7.10778502	7.00070177	6.92674949	**6.91765076**	6.91331117	6.91290844	6.91262084
8	8.29054024	7.10633682	6.99954493	6.92557980	6.91657397	**6.91223355**	6.91180896	6.91152976
9	8.29020408	7.10597471	6.99925565	6.92528733	6.91630473	6.91196410	**6.91153331**	6.91125558
10	8.29012004	7.10588418	6.99918333	6.92521421	6.91623742	6.91189674	6.91146440	**6.91118667**

Tabelle 5.15: Punktweiser Wert bei gegebener Auflösung. Der Vergleichswert beträgt 6.91115456 bei einer Gittermaschenweite von 2^{-11} in beide Richtungen.

Um die Wirkungsweise der *Kombinationstechnik* bei der amerikanischen Put-Option zu untersuchen, ist die Tabelle 5.16 aufgestellt worden. Die Anzahl der Unbekannten für die *Kombinationstechnik* im zweidimensionalen Fall berechnen sich aus den Formeln (5.2) und (5.5). Aus der letzten Spalte der Tabelle 5.16 wird ersichtlich, dass sich die Konvergenz des Vollgitters auf einem Niveau einpendelt, das deutlich über der quadratischen Konvergenzordnung liegt. Unter Verwendung der *Kombinationstechnik* (vorletzte Spalte) wird, wie aus der Theorie zu erwarten war, die Konvergenz deutlich gedämpft. Die ersten Level mit ihren Werten sind überhaupt nicht aussagekräftig, weil die verwendeten Gitter zu grob sind. Bei der Fehleranalyse gehen wir analog zu den anderen Betrachtungen über. Aus der Tabelle 5.16 entnehmen wir zu den maximalen Leveln $n = 11, 12$ den Fehlertoleranzschlauch $0.00013563 \leq \varepsilon \leq 0.00014218$, der sich mit 40962 bis 90114 Unbekannten berechnen lässt. Diesen Fehlerbereich suchen wir jetzt in der Tabelle 5.14 und stellen fest, dass der angegebene Schlauch sich im Fehlerintervall auf dem isotropen Vollgitter $0.00005480 \leq \varepsilon \leq 0.00015612$ wiederfinden lässt mit $(2^8 - 1)^2$ bis $(2^9 - 1)^2$ bzw. 65025 bis 261121 Unbekannten. Damit ist eine Reduzierung des numerischen Aufwandes gezeigt worden.

n	$\sum_{\lvert l\rvert=n+1} V_l - \sum_{\lvert l\rvert=n} V_l$	DOF	$error_n^C$	Konvergenzordnung der Kombinationslösung	Konvergenzordnung der Vollgitterlösung
5	8.732426457	258	0.26352643		
6	7.254185224	642	0.04963434	5.3093569	5.74199333
7	6.937295225	1538	0.00378238	8.3469826	4.02140898
8	6.913659633	3586	0.00036246	8.9919668	4.47887791
9	6.904517721	8194	0.00096030	4.0700928	4.09193476
10	6.903058647	18434	0.00117142	2.9540803	4.42051763
11	6.912091933	40962	0.00013563	3.5324666	4.10841150
12	6.910171928	90114	0.00014218	2.9299155	4.77734493

Tabelle 5.16: Konvergenztabelle des amerikanischen Puts.

Über alle Kurse und Zeiten ist aus der in Flächenansicht dargestellten Abbildung 5.5 einer amerikanischen Put-Option der faire numerisch berechnete Optionspreis ablesbar. An dem Punkt $(S = K,\ t = T)$ ist wieder deutlich die Singularität zu erkennen. Mit fallendem Aktienkurs steigt der Wert der amerikanischen Put-Option.

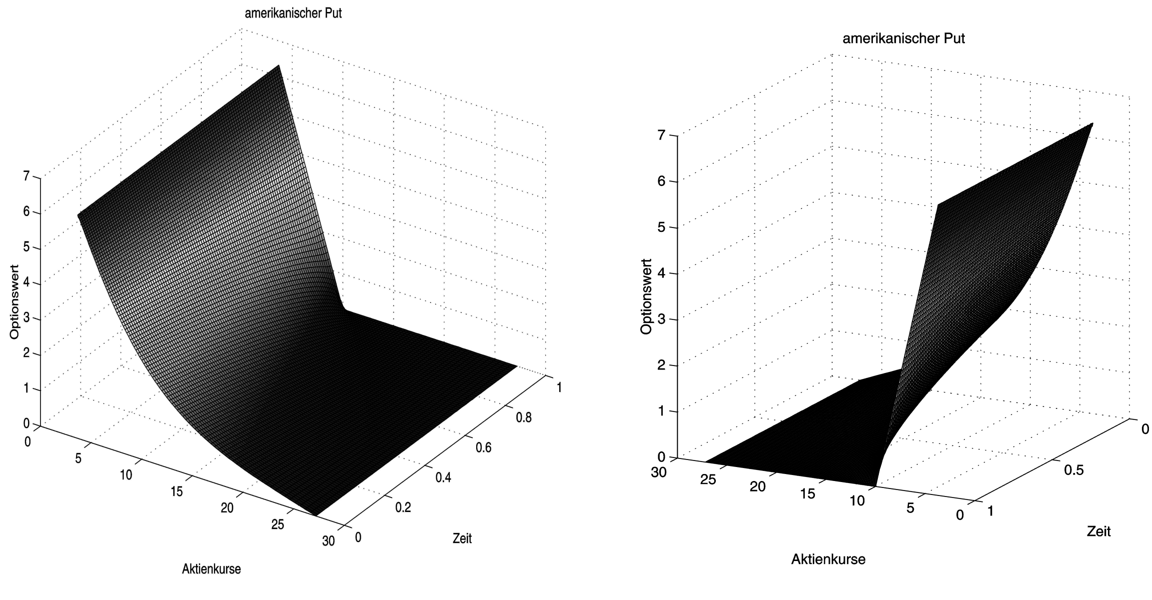

Abbildung 5.5: Amerikanische Put-Option in Flächenansicht zu folgenden Daten: $\vartheta = 0.5,\ K = 10.0,\ a = 1,\ T = 1.0,\ S = K,\ r = 0.05,\ \sigma = 0.6,\ \delta = 0.2,\ n = m = 100$. Rechts ist die Option rotiert dargestellt.

Der typische Kurvenverlauf der amerikanischen Put-Option für die ausgewählten Zeitpunkte $t \in \{0,\ \frac{1}{2}, 1\}$ über alle Kurswerte kann der Abbildung 5.6 entnommen werden. Dies entspricht einem Querschnitt der Flächenabbildung 5.5 genau zu diesen Zeitpunkten. Zu erkennen ist deutlich, dass der Preis der amerikanischen Put-Option zum Zeitpunkt $t = 0$ über den Preisen der beiden anderen Zeitpunkte $t = \frac{1}{2}$, $t = 1$ liegt, je mehr die Option aus dem Geld kommt. Mit zunehmendem Aktienkurs fällt der Wert der Option, da die Absicherungsstrategie, auf fallende Kurse zu setzen, nicht mehr erfüllbar ist. Die Option wird somit immer wertloser.

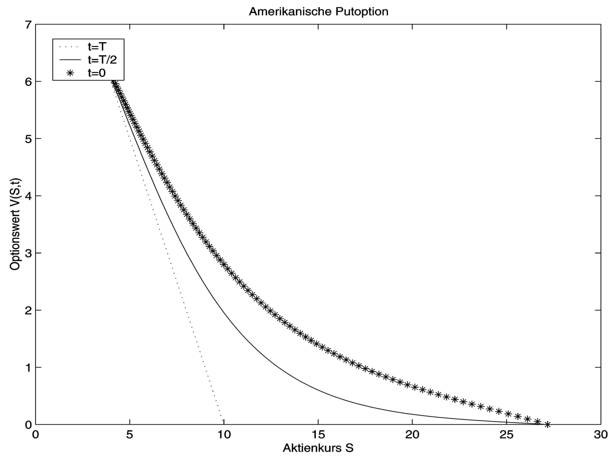

Abbildung 5.6: Amerikanische Put-Option in Seitenansicht zu folgenden Daten: $\vartheta = 0.5$, $K = 10.0$, $a = 1$, $T = 1.0$, $S = K$, $r = 0.05$, $\sigma = 0.6$, $\delta = 0.2$, $n = m = 100$.

5.4 Höherdimensionale Probleme bei Basket-Optionen

Einleitend wurde erwähnt, dass die *Kombinationstechnik* im hochdimensionalen Bereich zu einer merklichen Aufwandsreduzierung beiträgt, weil die *Kombinationstechnik* dem Phänomen des “Fluchs der Dimensionen“ entgegen wirkt. Zuerst soll die numerische Stabilität des diskreten Operators der Basket-Option an einem Beispiel gezeigt werden. Im Anschluss wird der Algorithmus für die Basket-Optionen vorgestellt. Danach wird die *Kombinationstechnik* zur numerischen Bewertung der Basket-Optionen herangezogen.

5.4.1 Numerische Stabilität

Da wir bei der *Kombinationstechnik* auf stark anisotropen kartesischen Gittern operieren, müssen wir uns vergewissern, dass wir in jede Koordinatenrichtung gehen können, ohne dass wir an irgendwelche Restriktionen gebunden sind. Aus diesem Grund wurde für amerikanische Optionen und Basket-Optionen die Semi-Diskretisierung (Crank-Nicolson-Verfahren) gewählt. Dafür wird die Stabilitätsaussage aus Abschnitt 3.5, S.34 auf einen praktischen Fall angewandt.

Beispiel 5.1 (Standardbeispiel)**.** Wir betrachten eine europäische Call-Option auf zwei Aktien die numerisch bewertet werden soll. Die beiden Aktien besitzen eine negative Korrelation von $\varrho = -0.6$. Damit das Crank-Nicolson-Verfahrens eingesetzt werden kann ist der Parameter des $\vartheta-$Verfahren mit $\vartheta = \frac{1}{2}$ zu belegen. Das zulässige Gebiet ist auf $[-a, a]^2$ mit $a = 3$ zugeschnitten. Die Portefeuille-Gewichte sind $\alpha_1 = 0.4$ und $\alpha_2 = 0.6$. Die Aktien S_1 und S_2 haben eine Volatilität bzw. Standardabweichung von $\sigma_1 = 0.2$ und $\sigma_2 = 0.3$. Der Marktzins betrage $r = 0.04$. Die Laufzeit der Basket-Option ist $T = 2$. Die Basket-Option kann zu einem Preis von $K = 80$ ausgeübt werden.

Mit MATLAB angewendet auf die diskrete Operatormatrix L_h aus (3.13), S.34 können die Eigenwerte zur Kontrolle für jeweilige Gitterverfeinerungen angegeben werden. Anhand des Standardbeispiels 5.1 für Basket-Optionen sollen die Eigenwerte numerisch berechnet werden. Betrachtet wird die gleiche Gittermaschenweite $2^{-n_1} = 2^{-n_2} = 2^{-m} = 2^{-4}$ für alle drei Richtungen, wobei $C = -(2A^{-1} + I)$ die Verfahrensmatrix der diskretisierten Differentialgleichung aus Abschnitt 3.5 sei. Die Matrizen $A = -I + \frac{1}{2}\Delta\tau L_h$, C und der Eigenvektor v können den folgenden Ergebnissen entnommen werden. So ist abzulesen, dass der größte betragsmäßige Eigenwert 0.802148 deutlich kleiner als 1 ist. Damit ist die aufgestellte diskretisierte Operatormatrix stabil.

$$A = \begin{pmatrix}
-1.357222 & 0.097222 & 0.000000 & 0.085069 & -0.026042 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\
0.076389 & -1.357222 & 0.097222 & 0.026042 & 0.085069 & -0.026042 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\
0.000000 & 0.076389 & -1.357222 & 0.000000 & 0.026042 & 0.085069 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\
0.088542 & 0.026042 & 0.000000 & -1.357222 & 0.097222 & 0.000000 & 0.085069 & -0.026042 & 0.000000 \\
-0.026042 & 0.088542 & 0.026042 & 0.076389 & -1.357222 & 0.097222 & 0.026042 & 0.085069 & -0.026042 \\
0.000000 & -0.026042 & 0.088542 & 0.000000 & 0.076389 & -1.357222 & 0.000000 & 0.026042 & 0.085069 \\
0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.088542 & 0.026042 & 0.000000 & -1.357222 & 0.097222 & 0.000000 \\
0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & -0.026042 & 0.088542 & 0.026042 & 0.076389 & -1.357222 & 0.097222 \\
0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & -0.026042 & 0.088542 & 0.000000 & 0.076389 & -1.357222
\end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix}
0.486134 & 0.107755 & 0.007252 & 0.094777 & -0.015038 & -0.002740 & 0.005516 & -0.002422 & -0.000057 \\
0.084767 & 0.493082 & 0.107825 & 0.039595 & 0.096492 & -0.015036 & 0.004626 & 0.005195 & -0.002422 \\
0.004283 & 0.084822 & 0.486621 & 0.004120 & 0.039612 & 0.094839 & 0.001279 & 0.004626 & 0.005516 \\
0.097734 & 0.042957 & 0.005621 & 0.493168 & 0.109164 & 0.006881 & 0.094839 & -0.015036 & -0.002740 \\
-0.017634 & 0.098605 & 0.042977 & 0.085977 & 0.500588 & 0.109164 & 0.039612 & 0.096492 & -0.015038 \\
-0.002390 & -0.017634 & 0.097797 & 0.003860 & 0.085977 & 0.493168 & 0.004120 & 0.039595 & 0.094777 \\
0.005841 & 0.005078 & 0.001555 & 0.097797 & 0.042977 & 0.005621 & 0.486621 & 0.107825 & 0.007252 \\
-0.002741 & 0.005360 & 0.005078 & -0.017634 & 0.098605 & 0.042957 & 0.084822 & 0.493082 & 0.107755 \\
0.000028 & -0.002741 & 0.005841 & -0.002390 & -0.017634 & 0.097734 & 0.004283 & 0.084767 & 0.486134
\end{pmatrix}$$

$$v = \begin{pmatrix} 0.802148 & 0.246584 & 0.658520 & 0.325707 & 0.373608 & 0.589326 & 0.514480 & 0.434764 & 0.473461 \end{pmatrix}$$

5.4.2 Der Basisalgorithmus für Basket-Optionen

Algorithmus 5.3 (Algorithmus zur Berechnung der Basket-Option)**.** Das Finite Differenzen-Verfahren im räumlich zweidimensionalen Fall (Die dritte Dimension für die *Kombinationstechnik* ist die Zeit.) funktioniert unter der Maßgabe, dass die rechte Seite f sowie die Anfangs- und Randwerte bekannt sind. Mittels dieses Verfahrens erhält man numerisch die gesuchte Lösungsfunktion $u : \bar{\Omega} :\to \mathbb{R}$ mit $\bar{\Omega} := [0,T] \times [-a,a]^2$. Aus der Theorie ist bekannt, dass wenn eine Lösung u existiert, diese Lösung auch eindeutig sein muss. Es kann nur eine Lösung geben. Gehen wir den Weg, dass wir annehmen, die Lösungsfunktion u ist bekannt, so setzt sich f dann aus dem kontinuierlichen Operator L auf u angewandt zusammen ($f = L(u)$). Für die Anfangs- und Randwertbedingungen werden die exakten Werte der Lösungsfunktion u angesetzt. Als Ergebnis muss u herauskommen, weil nur diese eine Lösung existieren kann. Durch die Diskretisierung kann nicht genau u herauskommen, aber bei steigender Gitterverfeinerung wird die Genauigkeit der Lösungsfunktion u zuverlässiger. Da keine geschlossene Lösungsformel oder numerischen Referenzwerte existieren, wurden Testfälle aufgestellt, um zu verifizieren, ob der implementierte Algorithmus seine Richtigkeit besitzt. Die Referenzwerte wurden zu einer sehr feinen Auflösung und zu einem bestimmten Quadrupel (S_1, S_2, τ, K) konstruiert.

$0 \leq \vartheta \leq 1,\ 1 \leq \omega < 2,\ a, m, n_1, n_2$ gegeben
$\Delta x = \frac{2a}{n_1},\ \Delta y = \frac{2a}{n_2}, \Delta\tau = \frac{\frac{1}{2}\sigma^2 T}{m},\ \tau_k = (k-1)\Delta\tau\ \forall\, 1 \leq k \leq m+1$
$x_i := -a + (i-1)\Delta x\ \forall\, 1 \leq i \leq n_1 + 1,\ y_j := -a + (j-1)\Delta y\ \forall\, 1 \leq j \leq n_2 + 1$
Anfangs- und Randwerte des Würfels füllen
explizites Speichern der diskreten Operatormatrix $L_h = L_\Delta + L_\nabla + L_\tau + L_{\partial_{xy}} - L_r$
`for` $k = 2 : m$ `do`
  `Randwerte auf das Innere abtragen führt auf Vektor` r_h
  `Werte der Zeitstufe` $(k-1)$ `auf dem Inneren in Vektor` g_h `speichern`
  `löse` $L_h w_h^{(k)} = g_h + r_h$
  $w_h^{(k)}$ `in aktuelle Zeitschicht des Würfel eintragen`
`end`

Abbildung 5.7: Kernalgorithmus der Basket-Option im räumlich zweidimensionalen Fall

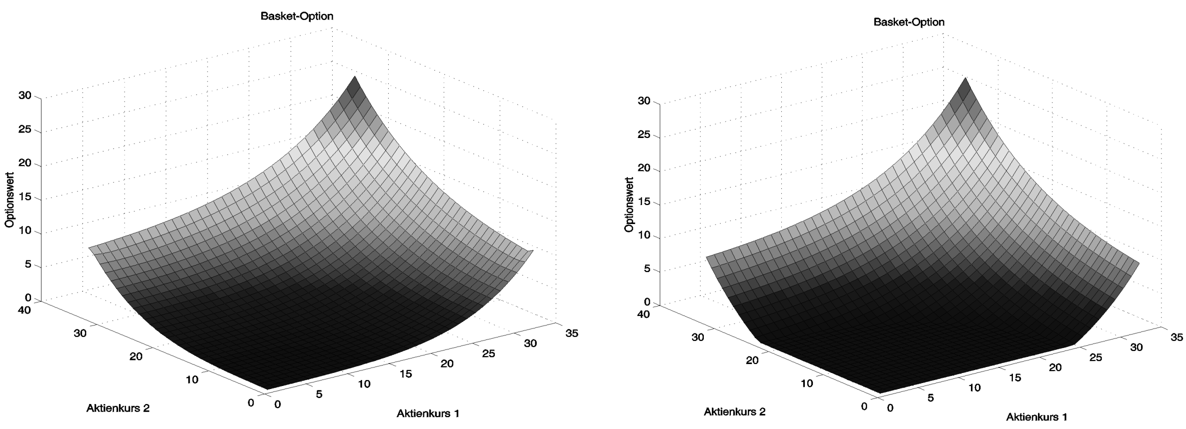

Abbildung 5.8: Bilder einer Basket-Option (links für t=0, rechts für t=T) zu den Daten aus dem Standardbeispiel 5.1, nur dass für den Basispreis $K = 10$ gilt, mit der gleichen Gittermaschenweite $h = 2^{-n_1} = 2^{-n_2} = 2^{-m} = 2^{-4}$ in alle drei Richtungen.

Im **dreidimensionalen** räumlichen Fall muss ein 27-Punkte-Differenzenstern betrachtet werden. Diese Größe lässt sich nur noch mit einer geschickten Implementierung beherrschen, d.h. die diskrete Operatormatrix kann nur implizit gespeichert werden. Drei- und höherdimensionale Probleme erfordern rekursive Algorithmen. Die diskrete Operatormatrix ist nicht symmetrisch und auch nicht positiv-definit. Beides sind Hinderungsgründe, ein herkömmliches iteratives Verfahren zum Lösen von Gleichungssystemen aufzustellen. Zum weiteren Vorgehen gibt es drei Möglichkeiten, um trotzdem zur Lösung eines linearen Gleichungssystems zu gelangen. Die eine besteht darin, einen direkten robusten Löser einzusetzen, wie z.B. die klassische Gauß-Jordan-Elimination. Als zweite Alternative bietet sich an, anspruchsvollere iterative Löser einzubinden. In vielen Softwarepaketen finden sich heutzutage implementierte iterative Löser, die in den Algorithmus eingebettet werden können. Als dritte Alternative existiert der Vorschlag von Schwarz [Schwarz86] auf S.554-556. Er empfielt, durch eine LU-Zerlegung für die zweidimensionale parabolische Gleichung den numerischen Aufwand zu reduzieren. Dies gilt aber nur für den impliziten Euler-Fall, der eine Restriktion an die Zeitsteuerung stellt und somit unbrauchbar für die *Kombinationstechnik* ist, da somit nicht mehr auf den verlangten anisotropen Gittern operiert werden kann. In der Diplomarbeit wurde die zweite Alternative gewählt. Z.B. bietet *MATLAB* mit den integrierten GMRES- oder BICGSTAB-Iterationslösern die Möglichkeit, die diskrete Operatormatrix speicherschonend aufzurufen.

Bemerkung 5.2 (Bemerkungen zu dem Algorithmus im multivariaten Fall)**.** Die diskretisierten Differentialoperatoren setzen sich additiv aus $(d-1)-$räumlichen Dimensionen zusammen. Das explizite Speichern der Operatormatrix würde keinen Sinn mehr ergeben, weil der Implementierungsaufwand nicht mehr zu rechtfertigen wäre bzw. die gegebenen Speichergrenzen schlicht gesprengt werden müssten. Der entstehende Differenzenstern würde bei zunehmend wachsender räumlicher Dimension exponentiell ansteigen. Dagegen lohnt es sich wieder, auf eine implizite Speicherung der diskreten Operatormatrix zurückzugreifen. Das umständliche Übertragen der Randwerte auf die rechte Seite des Gleichungssystems entfällt. Ein Teil der Randwerte für drei und mehr räumliche Dimensionen muss numerisch berechnet werden. Für höhere Dimensionen greifen die Ränder und Kanten des $(d-1)-$dimensionalen Hyperwürfels auf die Ränder und Kanten des jeweils darunter liegenden $(d-2)-$dimensionalen Hyperwürfels $\forall\, d \geq 3$, bis der sich rekursiv aufrufende Algorithmus auf eine geschlossene Lösungsformel für die Randfunktion trifft und der Algorithmus stoppt.

5.4.3 Der dreidimensionale Fall für Basket-Optionen

Es folgen die numerischen Resultate der *Kombinationstechnik* zu einer Basket-Option auf zwei Aktien mit den Daten aus dem Standardbeispiel 5.1. Aus der Tabelle 5.17 können die numerischen Ergebnisse abgelesen werden. Die Tabelle 5.18 trägt die dazugehörigen relativen Fehler. Die Zeilen- und Spaltenköpfe der Tabellen 5.17 und 5.18 beinhalten die Zweierpotenz der Gitterdiskretisierung für die beiden Kurse. Die erste Spalte beider Tabellen trägt die Zweierpotenz der Zeitdiskretisierung. Auch hier gilt für die Berechnung der Anzahl der Unbekannten (DOF) auf dem Vollgitter die Formel (5.5) für $d = 3$. Der Computer konnte das Referenzgitter zu einer Gittermaschenweite von $h = 2^{-8}$ in alle zwei Kursrichtungen und in der Zeitrichtung lösen. Mit zunehmender Auflösung strebt das numerische Verfahren auf dem fixierten Gitterpunkt gegen den Referenzwert von 8.212655678. Die Basket-Option wurde immer am selben Gitterpunkt $(S_1 = S_2 = 80,\ t = 0)$ ausgewertet, aber immer zu einer unterschiedlichen Diskretisierung. Die Tabellen 5.18 und 5.17 untergliederen sich in mehrere Untertabellen. Diese Untertabellen stehen für verschiedene Zeitdiskretisierungen, werten aber immer im selben Gitterpunkt aus.

Für die beiden Tabellen 5.17 und 5.18 gilt, dass die Zeilen für den Kurs des Underlyings S_1 und die Spalten für den Kurs des Underlyings S_2 stehen. Deutlich zu erkennen ist, dass für eine sehr grobe Gitterauflösung (beteiligte 2^1 Diskretisierungen in mindestens einer der drei Richtungen) die ausgegebenen Daten keine große Zuverlässigkeit liefern. Denkt man sich in jeder einzelnen Untertabelle aus 5.17 und 5.18 die erste Zeile und die erste Spalte weg, kann eine ausbalancierte Preis- bzw. Fehlerentwicklung entdeckt werden. D.h. starten wir z.B. mit 2^7 Diskretisierungen in Kursrichtung Eins und mit 2^2 Diskretisierungen in Kursrichtung Zwei erhalten wir in etwa denselben numerisch berechneten Wert, als wenn wir 2^2 Diskretisierungen in Richtung Eins und 2^7 in Richtung Zwei vorgenommen hätten. Die Tabelle 5.19 enthält die Ergebnisse der *Kombinationstechnik* für die einzelnen Levels. Die unterstrichenen Ergebnisse sind die auf dem isotropen Vollgitter berechneten Werte. Die fettgedruckten Einträge der Tabellen 5.17 und 5.18 sind die Werte auf dem Dünngitter zu einem bestimmten Level $n \in \mathbb{N}$. Zur Berechnung des Levels n kann die modifizierte Gleichung (5.1), S.55 herangezogen werden, d.h. wir ermitteln $n = i+j+k-2,\ \forall\, 1 \leq i, j, k, n \leq 7$. Die

Markerung erfasst die zulässigen Werte. Es folgen die numerisch berechneten Ergebnisse zu den verschiedenen Diskretisierungen, aber immer auf demselben Gitterpunkt.

k		1	2	3	4	5	6	7
1	1	**−0.12118223**	**1.065779587**	**1.91453797**	**2.40894309**	**2.72406141**	**2.90228952**	**2.99521899**
	2	**1.01207630**	**2.688215055**	**3.73243261**	**4.39079791**	**4.81888097**	**5.04228749**	5.15767870
	3	**0.71220236**	**3.774215419**	**4.90535308**	**5.64915725**	**6.09728297**	6.32492029	6.44008167
	4	**0.25220517**	**4.441079600**	**5.65498937**	**6.49415400**	6.87139661	7.08675754	7.19082190
	5	**0.08012549**	**4.871940216**	**6.10677190**	6.87441086	7.30540406	7.47252582	7.56300096
	6	**0.02205242**	**5.096650805**	6.34026180	7.09373255	7.47606189	7.66061533	7.73072963
	7	**0.00575122**	5.214100346	6.45723028	7.20034058	7.56898872	7.73307526	7.80681417
2	1	**-0.12745833**	**1.062183919**	**1.88786318**	**2.33265349**	**2.59752598**	**2.74887764**	2.82943376
	2	**1.11077658**	2.678869735	**3.63816481**	**4.20820534**	**4.60463122**	4.81718937	4.93315854
	3	**0.73434477**	**3.687586343**	**4.70409054**	**5.47750687**	5.93489998	6.18984687	6.32318403
	4	**0.29044787**	**4.268592377**	**5.48939012**	6.34295773	6.81907840	7.08725120	7.21938233
	5	**0.08616039**	**4.668401699**	5.95238595	6.82458930	7.34988316	7.56420417	7.68540709
	6	**0.02363243**	4.882138888	6.21256759	7.09693148	7.56821829	7.81475878	7.90362064
	7	0.00615628	4.999361834	6.34765105	7.23162674	7.69204144	7.90614071	8.00724553
3	1	**-0.13085624**	**1.061646293**	**1.88424502**	**2.32586279**	**2.59462223**	2.74712054	2.82729287
	2	**1.15959797**	**2.679828220**	**3.63226542**	**4.19688736**	4.57982735	4.78259475	4.89105712
	3	**0.76391935**	**3.684464204**	4.69107686	5.42615684	5.84827237	6.08729928	6.21510157
	4	**0.29003722**	**4.260856902**	5.44079311	6.22960626	6.72444796	6.99932391	7.14356727
	5	**0.12786723**	4.646408106	5.86917594	6.73119314	7.26298777	7.53622953	7.68247115
	6	0.02448050	4.849383576	6.11306941	7.01036562	7.54051825	7.83385690	7.94847125
	7	0.00637434	4.958757884	6.24243613	7.15711296	7.68939362	7.95104876	8.08267753
4	1	**-0.13276470**	**1.06150089**	**1.88357105**	**2.32141785**	2.58765090	2.73853488	2.81798447
	2	**1.18413488**	**2.67987921**	**3.62999122**	4.18949505	4.57049049	4.77309544	4.88197663
	3	**0.78035544**	**3.68346450**	4.68869875	5.41883639	5.84103889	6.07991706	6.20613523
	4	**0.29395502**	4.25541039	5.43476195	6.21676802	6.69766946	6.95813681	7.09437920
	5	0.09972556	4.63871922	5.86334804	6.70486583	7.20677468	7.48947496	7.63980713
	6	0.48378088	4.84104361	6.10684751	6.96970513	7.49396401	7.79140668	7.93763050
	7	0.00648680	4.95053840	6.23446659	7.10844130	7.64697752	7.94027863	8.09513777
5	1	**-0.13378218**	**1.06144772**	**1.88344749**	2.31957451	2.58483867	2.73523898	2.81445312
	2	**1.19647217**	**2.67976965**	3.62897407	4.18604708	4.56570615	4.76768620	4.87622008
	3	**0.78893992**	3.68307610	4.68775271	5.41554535	5.83640306	6.07449572	6.20039805
	4	0.29638519	4.25297447	5.43215851	6.21217016	6.69191883	6.95310483	7.09068078
	5	0.09179545	4.63486654	5.85952764	6.69932421	7.19915911	7.47612777	7.61995364
	6	0.45162340	4.83634240	6.10213634	6.96484664	7.48063876	7.76363011	7.91442773
	7	0.00628690	4.94535787	6.22936539	7.10486754	7.62716808	7.91712318	8.07426983
6	1	**-0.13430804**	**1.06142306**	1.88343372	2.31874311	2.58353369	2.73370601	2.81280873
	2	**1.20266292**	2.67967873	3.62849232	4.18438927	4.56339010	4.76505038	4.87342863
	3	0.79331875	3.68290757	4.68733844	5.41398409	5.83417103	6.07193863	6.19770352
	4	0.29766849	4.25182993	5.43094773	6.20999444	6.68918066	6.95009667	7.08741853
	5	0.09221159	4.63304229	5.85772955	6.69670958	7.19606643	7.47279524	7.61710410
	6	0.41534348	4.83408897	6.09996367	6.96195043	7.47730682	7.75958808	7.90778897
	7	0.00618689	4.94288029	6.22701642	7.10170104	7.62430980	7.91048455	8.06049078
7	1	**-0.13457541**	1.06141096	1.88343929	2.31835076	2.58290555	2.73296682	2.81201543
	2	1.20576444	2.67962410	3.62825879	4.18357815	4.56224996	4.76375331	4.87205520
	3	0.79552918	3.68282959	4.68714650	5.41322579	5.83307719	6.07068440	6.19637159
	4	0.29832474	4.25127584	5.43036527	6.20893850	6.68784189	6.94862284	7.08587993
	5	0.09242027	4.63215510	5.85685990	6.69543903	7.19455528	7.47117007	7.61542504
	6	0.40253067	4.83299061	6.09890954	6.96053990	7.47568297	7.75786358	7.90601172
	7	0.00613467	4.94167096	6.22586504	7.10021722	7.62262800	7.90870423	8.05842513

Tabelle 5.17: Numerische Werte zu den Basket-Optionen auf zwei Aktien. Die Parameter entstammen aus dem Standardbeispiel 5.1 mit dem Referenzwert $V_{(8,8,8)}(80,80,0) = 8.212655678$ auf dem Referenzgitter.

Für eine höhere Auflösung bzw. Gitterverfeinerung reichte die vorhandene Rechen- und Speicherkapazität nicht aus. An den vorliegenden Rechenergebnissen kann trotzdem die Wirkung der *Kombinationstechnik* im höherdimensionalen Fall abgelesen werden. Aus der nachstehenden Tabelle gehen die relativen Fehler hervor, die im Vergleich zur Referenzlösung begangen wurden.

k		1	2	3	4	5	6	7
1	1	**1.01475554**	**0.87022716**	**0.76687955**	**0.70667915**	**0.66830931**	**0.64660766**	**0.63529227**
	2	**0.87676625**	**0.67267408**	**0.54552671**	**0.46536198**	**0.41323718**	**0.38603447**	0.37198405
	3	**0.91327989**	**0.54043910**	**0.40270805**	**0.31214000**	**0.25757474**	0.22985687	0.21583444
	4	**0.96929066**	**0.45923952**	**0.31142987**	**0.20925042**	0.16331611	0.13709306	0.12442184
	5	**0.99024365**	**0.40677651**	**0.25641934**	0.16294909	0.11046994	0.09012064	0.07910409
	6	**0.99731482**	**0.37941501**	0.22798884	0.13624376	0.08969008	0.06721824	0.05868090
	7	**0.99929971**	0.36511397	0.21374637	0.12326281	0.07837500	0.05839528	0.04941659
2	1	**1.01551974**	**0.87066498**	**0.77012756**	**0.71596842**	**0.68371668**	**0.66528760**	0.65547882
	2	**0.86474818**	**0.67381199**	**0.55700507**	**0.48759505**	0.43932493	0.41344315	0.39932237
	3	**0.91058376**	**0.55098734**	**0.42721444**	**0.33304072**	0.27734703	0.24630386	0.23006828
	4	**0.96463410**	**0.48024213**	**0.33159378**	0.22766057	0.16968655	0.13703295	0.12094423
	5	**0.98950882**	**0.43156003**	0.27521788	0.16901553	0.10505402	0.07895759	0.06419952
	6	**0.99712243**	0.40553469	0.24353731	0.13585425	0.07846881	0.04844923	0.03762912
	7	0.99925039	0.39126123	0.22708910	0.11945331	0.06339170	0.03732227	0.02501141
3	1	**1.01593348**	**0.87073045**	**0.77056812**	**0.71679528**	0.68407025	0.66550155	0.65573950
	2	**0.85880353**	**0.67369529**	**0.55772340**	0.48897317	0.44234514	0.41765551	0.40444877
	3	**0.90698266**	**0.55136750**	0.42879903	0.33929327	0.28789509	0.25879039	0.24322876
	4	**0.96468411**	**0.48118403**	0.33751111	0.24146262	0.18120907	0.14773927	0.13017572
	5	**0.98443046**	0.43423804	0.28534980	0.18038775	0.11563469	0.08236387	0.06455701
	6	0.99701917	0.40952308	0.25565253	0.14639479	0.08184166	0.04612378	0.03216796
	7	0.99922383	0.39620531	0.23990041	0.12852635	0.06371411	0.03185411	0.01582656
4	1	**1.01616586**	**0.87074815**	**0.77065018**	**0.71733651**	0.68491910	0.66654697	0.65687293
	2	**0.85581583**	**0.67368908**	**0.55800031**	0.48987328	0.44348202	0.41881218	0.40555444
	3	**0.90498135**	0.55148923	0.42908859	0.34018463	0.28877586	0.25968927	0.24432053
	4	**0.96420706**	0.48184721	0.33824548	0.24302585	0.18446970	0.15275434	0.13616502
	5	0.98785708	0.43517427	0.28605943	0.18359345	0.12247938	0.08805686	0.06975192
	6	0.94109324	0.41053858	0.25641013	0.15134575	0.08751026	0.05129266	0.03348797
	7	0.99921014	0.39720614	0.24087081	0.13445277	0.06887883	0.03316552	0.01430936
5	1	**1.01628975**	**0.87075462**	**0.770665231**	0.71756096	0.68526153	0.66694829	0.65730292
	2	**0.85431360**	**0.67370242**	0.55812416	0.49029312	0.44406458	0.41947082	0.40625535
	3	**0.90393607**	0.55153652	0.429203792	0.34058536	0.28934034	0.26034939	0.24501917
	4	0.96391116	0.48214382	0.338562496	0.24358570	0.18516992	0.15336705	0.13661539
	5	0.98882268	0.43564338	0.286524612	0.18426822	0.12340667	0.08968206	0.07216931
	6	0.94500884	0.41111102	0.256983782	0.15193733	0.08913278	0.05467483	0.03631329
	7	0.99923448	0.39783693	0.241491952	0.13488793	0.07129089	0.03598500	0.01685030
6	1	**1.01635378**	**0.87075763**	0.770666906	0.71766220	0.68542042	0.66713495	0.65750314
	2	**0.85355980**	0.67371349	0.558182825	0.49049498	0.44434659	0.41979177	0.40659529
	3	0.90340289	0.55155704	0.429254234	0.34077546	0.28961212	0.26066075	0.24534726
	4	0.96375490	0.48228318	0.338709919	0.24385062	0.18550333	0.15373334	0.13701258
	5	0.98877201	0.43586551	0.286743559	0.18458658	0.12378325	0.09008784	0.07251639
	6	0.94942641	0.41138540	0.257248335	0.15228998	0.08953849	0.05516700	0.03712152
	7	0.99924666	0.39813861	0.241777973	0.13527349	0.07163893	0.03679335	0.01852801
7	1	**1.01638634**	0.87075910	0.770666229	0.71770997	0.68549691	0.66722495	0.65759976
	2	0.85318215	0.67372014	0.558211260	0.49059374	0.44448542	0.41994970	0.40676259
	3	0.90313374	0.55156654	0.429277606	0.34086780	0.28974531	0.26081347	0.24550934
	4	0.96367499	0.48235065	0.338780842	0.24397920	0.18566634	0.15391280	0.13719990
	5	0.98874660	0.43597354	0.286849450	0.18474129	0.12396725	0.09028572	0.07272072
	6	0.95098654	0.41151914	0.257376689	0.15246173	0.08973622	0.05537698	0.03733791
	7	0.99925302	0.39828586	0.241918169	0.13545416	0.07184371	0.03701012	0.01877968

Tabelle 5.18: Relative Fehler zu den Basket-Optionen auf zwei Aktien. Die Parameter entstammen aus dem Standardbeispiel 5.1 mit dem Referenzwert $V_{(8,8,8)}(80, 80, 0) = 8.212655678$ auf dem Referenzgitter.

n	$\sum\limits_{\lvert l\rvert=n+2} V_l - 2 \sum\limits_{\lvert l\rvert=n+1} V_l - \sum\limits_{\lvert l\rvert=n} V_l$	DOF	$error_n^C$	Konvergenzordnung der Kombinationslösung	Konvergenzordnung der Vollgitterlösung
1	-0.12118223	2	1.014755547		
2	2.19276202	14	0.733002075	1.384382912	1.505992099
3	3.33508230	62	0.593909395	1.307135528	1.538345262
4	4.79363181	222	0.416311604	1.345801389	1.610285884
5	6.17246874	702	0.248419879	1.421653544	1.693384938
6	6.88105276	2046	0.162140355	1.443092144	1.790343692
7	7.69461721	5630	0.063078068	1.588841254	1.944370881

Tabelle 5.19: Konvergenztabelle der Basket-Option mit zwei Aktien. Die Erzeugung der Daten erfolgte zu dem Beispiel 5.1 S.69. Der Referenzwert ist zum Level $n = 8$ berechnet wurden. Sein Wert ergibt sich somit über $V_{(8,8,8)}(80, 80, 0) = V_{\text{referenz}}(80, 80, 0) = 8.212655678$.

Der Level $n = 1$ kann auf Grund der sehr groben Gitterauflösung keine zuverlässigen Daten liefern. Alle unterstrichenen Werte gehören zum isotropen Vollgitter. Die Konvergenzordnung der sechsten Zeile aus Tabelle 5.19 wurde mit diesen unterstrichenen Werten mit der Formel (5.6) für die Glättung der Reduktionsfaktoren berechnet. Ebenfalls mit den geglätteten Reduktionsfaktoren wurde die fünfte Spalte berechnet, um die Konvergenzordnung der *Kombinationstechnik* besser ablesen zu können. Die fettgedruckten Werte entstammen dem Dünngitter. Verfährt man wieder nach der $\varepsilon-$Komplexität und sucht das numerische Fehlerintervall $0.063078068 \leq \varepsilon \leq 0.162140355$ auf dem Vollgitter, wird man feststellen, dass wesentlich tiefer auf dem Vollgitter aufgelöst werden muss, um dieselbe Fehlerqualität auf dem Dünngitter zu erhalten. Für dieses Fehlerintervall müssen auf dem Vollgitter zwischen $(2^5 - 1)^3 = 29791$ und $(2^6 - 1)^3 = 250047$ Unbekannte ausgerechnet werden. Wird die *Kombinationstechnik* eingesetzt, reichen 2046 bis 5630 Unbekannte für denselben Fehlerschlauch aus. Damit zeigt sich erneut die Vorteilhaftigkeit der *Kombinationstechnik*. Die Fehlerqualität kann gehalten werden, obwohl mit weniger Unbekannten gerechnet wurde. Die Anzahl der Unbekannten (DOF) für die *Kombinationstechnik* im dreidimensionalen Fall berechnet sich aus den Formeln (5.3) und (5.5) mit $d = 3$.

Bemerkung 5.3. Bei den Basket-Optionen besitzt der Algorithmus suboptimale Komplexität, da die implementierten Programmroutinen aus dem Algorithmus 5.3 mit einfacher Konvergenzordnung den numerischen Fehler abbauen. Dies kann in der dritten Zeile von Tabelle 5.19 abgelesen werden.

5.4.4 Der vierdimensionale Fall für Basket-Optionen

Wie wir in der Diplomarbeit gesehen haben, kann unter Verwendung der *Kombinationstechnik* für höhere Dimensionen der "Fluch der Dimensionen" durchbrochen werden. Diese Wirkung soll abschließend an einem numerischen Beispiel für den vierdimensionalen Fall (drei räumliche Dimensionen plus einer Dimension für die Zeit) gezeigt werden. Der Algorithmus für vier Dimensionen baut konzeptionell auf dem Algorithmus mit drei Dimensionen für die numerische Bewertung von Basket-Optionen auf.

Bemerkung 5.4 (Vorimplementierte Iterative-Löser für nicht symmetrische und nicht positiv definite Matrizen)**.** *MATLAB* bietet bei den integrierten GMRES- oder BICGSTAB-Lösern die Möglichkeit, das aufgestellte lineare Gleichungssystem iterativ zu lösen. Das lineare Gleichungssystem wird für alle Zeitpunkte $2 \leq k \leq m + 1$ mit dem jeweiligen

Iterations-Verfahren gelöst. Um eines der Verfahren unter *MATLAB* verwenden zu können, muss man eine Funktion schreiben, die an das Iterations-Verfahren übergeben wird. Die Anwendung des Iterations-Verfahrens macht es erforderlich, alle Werte (auch die bekannten Randwerte) in einem Vektor W umzuspeichern und genauso ist mit der rechten Seite zu verfahren. Zur Speicherung der Vektoreinträge wurde folgende lexikographische Anordnung

$$W = [w_{1,1,1}, w_{1,1,2}, \ldots, w_{1,1,n_3+1}, w_{1,2,2}, \ldots, w_{n_1+1,n_2+1,n_3+1}]$$

gewählt. Aus Implementierungsgründen wurde auf die Indextransformation

$$(i_1, i_2, i_3) \mapsto (i_1 - 1) \cdot (n_2 + 1) \cdot (n_3 + 1) + (i_2 - 1) \cdot (n_3 + 1) + i_3]$$

zu $n_j + 1$ Gitterpunkten in Richtung $j = 1, 2, 3$ zurückgegriffen. Wenn man die Randwerte für W auch an den korrespondierenden Positionen für die rechte Seite einträgt, liefern die vorgefertigten *MATLAB*-Iterationslöser den Lösungsvektor, mit bereits eingetragenen Randwerten.

Beispiel 5.2 (Beispiel für eine Basket-Option auf drei Aktien)**.** Wir betrachten eine europäische Call-Option auf drei Aktien, die numerisch bewertet werden soll. Zwischen den Aktien S_1 und S_2 bestehet eine negative Korrelation von $\varrho_{12} = -0.6$, zwischen den beiden Aktien S_1 und S_3 liegt eine positive Korrelation von $\varrho_{13} = 0.5$ vor, und zwischen S_2 und S_3 beträgt die Korrelation $\varrho_{23} = -0.1$. Damit das Crank-Nicolson-Verfahren eingesetzt werden kann, ist der Parameter des $\vartheta-$Verfahren mit $\vartheta = \frac{1}{2}$ zu belegen. Das zulässige Gebiet ist auf $[-a, a]^3$ mit $a = 3$ zugeschnitten. Die Portefeuille-Gewichte sind $\alpha_1 = 0.4,\ \alpha_2 = 0.3$ und $\alpha_3 = 0.3$. Die Aktien $S_1,\ S_2$ und S_3 haben eine Volatilität bzw. Standardabweichung von $\sigma_1 = 0.2,\ \sigma_2 = 0.3$ und $\sigma_3 = 0.4$. Der Marktzins betrage $r = 0.04$. Die Laufzeit der Basket-Option ist $T = 2$. Die Basket-Option kann zu einem Preis von $K = 80$ ausgeübt werden.

Der relative Fehler $error_n^F$ der Vollgitterlösung zum aktuell tiefsten Level n berechnet sich auf dem isotropen Vollgitter, d.h. es gilt

$$error_n^F = \left| \frac{V_{(n,n,n,n)}(S_1^\star, S_2^\star, S_3^\star, t^\star) - V_{\text{referenz}}(S_1^\star, S_2^\star, S_3^\star, t^\star)}{V_{\text{referenz}}(S_1^\star, S_2^\star, S_3^\star, t^\star)} \right|$$

zu einem bestimmten Punkt $(S_1^\star, S_2^\star, S_3^\star, t^\star) \in \mathbb{R}^4$ $, \forall\ 1 \leq n \leq 5$.

Es folgt für das Beispiel 5.2 die numerische Behandlung. Der Referenzwert wurde auf dem isotropen Vollgitter zum Level $n = 5$ berechnet. Die Kombinationslösung wurde ebenfalls bis zum Level $n = 5$ ermittelt. Die beiden Tabellen für die numerisch berechneten Optionspreise und die relativen Fehler befinden sich im Anhang auf S.83. Die zugehörige Konvergenztabelle der *Kombinationstechnik* sieht für das Beispiel folgendermaßen aus:

n	Kombinationslösung	DOF	$error_n^C$	$error_n^F$	Vollgitterlösung	Konvergenzordnung der Kombinationslösung	Konvergenzordnung der Vollgitterlösung
1	0.09546160	2	0.99720212	0.99720212	0.09546160		
2	4.52368259	18	0.86741565	0.75470737	8.36920829	1.14962430	1.32130962
3	12.8893546	98	0.62222667	0.37399907	21.3587025	1.26595212	1.63288776
4	20.7818485	418	0.39090605	0.13211988	29.6114469	1.36637613	1.96157537
5	26.5285046	1538	0.22247765	0	34.1192826	1.45503754	0

Tabelle 5.20: Konvergenztabelle für eine Basket-Option auf drei Aktien. Die Erzeugung der Daten erfolgte zu dem Beispiel 5.2. Der Referenzwert ist zum Level $n = 5$ berechnet wurden. Sein Wert ergibt sich somit über $V_{(5,5,5,5)}(80, 80, 80, 0) = V_{\text{referenz}}(80, 80, 80, 0) = 34.11928263$.

Die Kombinationslösung ergibt sich aus der Formel

$$\sum_{|l|=n+3} V_l(80,80,80,0) - 3\sum_{|l|=n+2} V_l(80,80,80,0) + 3\sum_{|l|=n+1} V_l(80,80,80,0) - \sum_{|l|=n} V_l(80,80,80,0).$$

Um die Wirkung der *Kombinationstechnik* zu verdeutlichen, wird die $\varepsilon-$Komplexität herangezogen. Das Fehlerintervall $0.22247765 \leq \varepsilon \leq 0.390906051$ auf dem Dünngitter kann auf dem isotropen Vollgitter, zu den Leveln $n = 3$ bzw. $n = 4$ in etwa wiedergefunden werden. Das isotrope Vollgitter brauchte zur Berechnung dieses Fehlerschlauchs zwischen $(2^3 - 1)^4 = 2401$ und $(2^4 - 1)^4 = 50625$ Unbekannte. Dies geht aus der fünften Spalte der Tabelle 5.20 hervor. Die Kombinationslösung kam mit 418 bis 1538 Unbekannten aus, wie aus der dritten und vierten Spalte der Tabelle 5.20 abgelesen werden kann. Für größere Level setzt sich das Verhalten in einem noch ausgeprägteren Maße fort.

6 Schlussbetrachtungen und Ausblick

Die Grundlagen der Theorie der *Kombinationstechnik* wurden vorgestellt und anhand der Numerik von Optionspreisaufgaben für Beispielfälle angewendet. Anhand der amerikanischen und europäischen Option konnte gezeigt werden, dass die *Kombinationstechnik* bereits für niederdimensionale Probleme einen spürbaren Effizienzgewinn mit sich bringt. Die europäischen Optionen weisen ein höheres Einsparpotential auf als die amerikanischen Optionen. Wichtig ist vor allem, dass sich bereits bei amerikanischen Optionen eine Wirkung der Kombinationstechnik deutlich abzeichnet. Das Semi−Diskretisierungsverfahren beschleunigt die Konvergenz der Voll- und Dünngitter-Lösung von einer einfachen auf eine quadratische Konvergenz und sichert darüber hinaus die Behandlung einer Familie anisotroper kartesischer Gitter ab. Die Semi-Diskretisierung führt bei den Basket-Optionen nicht zur gewünschten quadratischen Konvergenz. Die Fachliteratur schlägt zur Erlangung der quadratischen Konvergenz z.B. das Fractional-Step-Verfahren vor[1].

Wir können festhalten, dass bei zwei- und dreidimensionalen parabolischen Gleichungen der numerische Berechnungsaufwand auf einem Dünngitter spürbar reduziert werden kann, ohne dass die Lösungsqualität merklich in Mitleidenschaft gezogen wird. Höhere Dimensionen für Basket-Optionen, die auf den multivariaten parabolischen Gleichungen beruhen, übersteigen den über Dünngitter behandelbaren Rahmen[2]. Die Kombinationstechnik kann zur numerischen Bewertung multivariater exotischer Optionstypen herangezogen werden. Weitere ökonomische Einsatzgebiete lassen sich bei der Bewerung von Zinsderivaten[3], z.B. Zinsoptionsscheinen[4], finden. Diese strukturierten Finanzprodukte ermöglichen auf vielfältige Weise das Management von Zinsrisiken. Die Bewertung dieser Kontrakte gestaltet sich jedoch meist wesentlich schwieriger und anspruchsvoller als die Bewertung von Aktienoptionsscheinen, da Anleihen besondere Charakteristika, wie eine begrenzte Restlaufzeit und einen sicheren Rückzahlungsbetrag in Höhe des Nominalwertes der Anleihe am Laufzeitende, aufweisen. Als Schwierigkeit erweist sich vor allem die Modellierung der von der Stochastik getriebenen Zinssätze[5]. Statt Aktien oder vergleichbare Assets sind jetzt zinsabhängige Produkte, z.B. Zerobonds[6] oder Wandelanleihen[7], die Basiswerte der Optionen und führen, wie viele Produkte am Markt, direkt auf höherdimensionale Problemstellungen. Wie wir gesehen haben, eignet sich dann zur Modellreduzierung die Kombinationstechnik im besonderen Maße.

Die Kombinationstechnik verbessert die Komplexität der aufgestellten Algorithmen entscheidend und bietet über die Dünngitter-Theorie die Möglichkeit, die Algorithmen auf

[1] [Reis04] S.23.

[2] [Reis04] schlägt zur Modellreduktion für hochdimensionale Optionspreisaufgaben die Hauptkomponentenanalyse vor.

[3] Zinsderivate werden in der Praxis genutzt, um Schuldner gegen steigende Zinsen und Gläubiger gegen fallende Zinsen abzusichern.

[4] Verbriefen das Recht zum Kauf (Long) oder Verkauf (Short) bzw. zum Erhalt einer Barauszahlung bei Überschreiten (Call) oder Unterschreiten (Put) eines vorher festgelegten Anleihekurses.

[5] Erste Schritte in die Numerik von Zinsderivaten finden sich in [GünJüng03] S.241-260.

[6] Der Zinsertrag ist im Rückzahlungskurs enthalten. In der Regel werden Zerobonds mit einem hohen Abschlag emittiert und im Tilgungszeitpunkt zum Nominalbetrag zurückgezahlt.

[7] Die Anleihe kann gegen Aktien des Unternehmens getauscht werden.

natürliche Weise zu parallelisieren[8]. Im theoretischen Teil der Diplomarbeit wurde die hierarchische Teilraumzerlegung des zugrunde liegenden Funktionenraumes vorgestellt, um daraus die Kombinationstechnik zu entwickeln, die auf der Dünngitter-Theorie beruht. Dabei wurde der exponentielle Abfall der hierarchischen Überschüsse bei wachsender Dimension d gezeigt. Die Dünngitter-Theorie bietet weitere Möglichkeiten, die Problemdimension bei hochdimensionalen Differentialgleichungen spürbar zu reduzieren. Diese Theorie erweist sich aber als weitaus schwieriger als die *Kombinationstechnik*.

[8] [Reis04] S.72-74.

Literaturverzeichnis

[Bau90] H. Bauer: *Maß- und Integrationstheorie.* De Cruyter, Berlin, 1990.

[BS73] F. Black und M. Scholes: The pricing of options and corporate liabilities. *J. Polit. Econometrica 81* (1973), 637-659.

[Bun92] H.-J. Bungartz *Dünne Gitter und deren Anwendung bei der adaptiven Lösung der dreidimensionalen Poisson-Gleichung.* Dissertation, Institut für Informatik, Technische Universität München, 1992.

[Bun98] H.-J. Bungartz *Finite elements of higher order on sparse grids.* Habilitation thesis, Institut für Informatik, Technische Universität München, Aachen, Shaker Verlag, 1998.

[CRR79] J. Cox, S. Ross und M. Rubinstein: Option pricing: a simplified approach. *J. Finance Econometrica 7* (1979), 229-263.

[Cry71] C. Cryer: Thee solution of a quadratic programming problem using systematic overrelaxation. *SIAM J. Control 9* (1971), 385-392.

[Dorn97] T. Dornseifer *Diskretisierung allgemeiner elliptischer Differentialgleichungen in krummlinigen Koordinatensystemen aüf dünnen Gittern.* Dissertation, Institut für Informatik, Technische Universität München, 1997

[Grie04] M. Griebel, M. Schneider, C. Zenger: *A combination technique for the solution of sparse grid problems.* Proc. IMACS Internat. Symp. on Iterative Methods in Linear Algebra (P. de Groen and R. Beauwens, eds.), Elsevier, Amsterdam, 1992, pp. 263-281.

[GroRoos94] C. Großmann und H.-G. Roos: *Numerik partieller Differentialgleichungen.* B. G. Teubner, Stuttgart, 1994.

[GünJüng03] M. Günther, A. Jüngel: *Finanzderivate mit MATLAB.* Vieweg, Wiesbaden, 2003.

[Hack93] W. Hackbusch: *Iterative Lösung großer schwachbesetzter Gleichungssysteme.* B.G. Teubner, Stuttgart, 1993.

[Haus02] W. Hausmann, K. Diener, J. Käsler: *Derivate, Arbitrage und Portfolio-Selection.* Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden, 2002.

[Herr01] M. Herrmann: *Numerische Mathematik.* Oldenbourg Verlag, München Wien, 2001.

[Hull00] J. Hull: *Options, Futures, and Other Derivatives.* Fourth Edition. Prentice Hall International, Upper Saddle River, NJ 2000.

[Irle98] A. Irle: *Finanzmathematik Die Bewertung von Derivaten.* B.G. Teubner, Stuttgart 1998.

[KaraShr91] I. Karatzas, S. Shreve: *Brownian Motion and Stochastic Calculus.* Springer, New York, 1991.

[KnabAng01] P. Knabner, L. Angermann *Numerik partieller Differentialgleichungen "Eine anwendungsorientierte Einführung"* Springer, Berlin, 2001.

[Kranz02] Kranz C.J. *Untersuchung zur Kombinationstechnik bei der numerischen Strömungssimulation auf versetzten Gittern.* Dissertation, Institut für Informatik, Technische Universität München, 2002.

[Kür03] W. Kürsten: *Skriptum: Finanzderivate und Termingeschäfte.* Lehrstuhl für Finanzierung, Banken und Risikomanagement, Friedrich-Schiller-Universität Jena 2003.

[Oks98] Oksendal: *Stochastic Differential Equations.* Springer, Berlin, 1998.

[Reis04] C. Reisinger: *Numerische Methoden für hochdimensionale parabolische Gleichungen am Beispiel von Optionspreisaufgaben.* Dissertation, Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg 2004.

[Schwarz86] H. Schwarz: *Numerische Mathematik.* B.G. Teubner, Stuttgart, 1986.

[Sey00] R. Seydel: *Einführung in die Numerik von Finanzderivaten.* Springer, Berlin, 2000.

[Sey04] R. Seydel: *Tools for Computational Finance.* Springer, 2nd Edition Berlin, 2004.

[Tie02] J. Tietze: *Einführung in die Finanzmathematik.* Vieweg, Wiesbaden, 2002.

[Usz95] I. Uszczapowski: *Optionen und Futures verstehen*, dtv, 3., erweiterte Auflage 1995.

[Zum00] G. W. Zumbusch: A Sparse Grid PDE Solver. Advances in Software Tools for Scientific Computing (Proceedings SciTools '98), Hrsg.: H. P. Langtangen, A. M. Bruaset, E. Quak, Kapitel 4 in Lecture Notes in *Computational Science and Engineering 10.*, S. 133-178, Springer, 2000.

Anhang: Tabellen für eine Basket-Option auf drei Aktien

Es folgt in Tabelle 6.1 die Angabe der numerisch berechneten Optionswerte, für verschiedene Diskretisierungsweiten, zu dem Beispiel 5.2 auf S.76. Die erste Spalte gibt die Gittermaschenweite 2^{-i_3} des dritten Aktienkurses S_3 an. Die zweite Spalte steht für die Gittermaschenweite 2^{-k} in Zeitrichtung. In jeder Zeile steht zu einer bestimmten Gittermaschenweite 2^{-i_1} der Kurs der Aktie S_1 und ab der dritten bis zur siebten Spalte 2^{-i_2} für die Aktie S_2 mit $1 \leq i_1, i_2, i_3, k \leq 5$.

i_3	k	1	2	3	4	5
1	1	0.09546161	3.56352077	6.44969872	7.65935834	7.33327122
		1.05112068	8.47643599	16.05883248	23.38492787	30.54149488
		2.58885145	11.63268247	21.36977842	31.80762608	57.05113270
		2.90519362	11.21300296	18.46274901	29.56251796	46.67430208
		2.64608587	9.55560413	15.98754323	22.04788061	34.07326904
2	1	0.09546161	3.56352192	6.44969844	7.65935834	7.33327146
		1.05112082	8.47643451	16.05883284	23.38492786	30.54149745
		2.58885141	11.63268264	21.36977833	31.80762608	57.05114174
		2.90519361	11.21300296	18.46274900	29.56251792	46.67433274
		2.64608594	9.55560475	15.98754550	22.04789492	34.07407399
3	1	0.09546162	3.56352079	6.44969841	7.65935834	7.33327192
		1.05112068	8.47643472	16.05883253	23.38492787	30.54150461
		2.58885145	11.63268249	21.36977826	31.80762606	57.05117035
		2.90519361	11.21300296	18.46274900	29.56251800	46.67443759
		2.64608605	9.55560598	15.98755156	22.04794026	34.07605321
4	1	0.09546161	3.56352077	6.44969840	7.65935834	7.33327488
		1.05112068	8.47643439	16.05883242	23.38492787	30.54155840
		2.58885141	11.63268245	21.36977825	31.80762612	57.05144004
		2.90519361	11.21300296	18.46274901	29.56251897	46.67773100
		2.64608691	9.55561582	15.98760557	22.04947269	34.09178644
5	1	0.09546161	3.56352120	6.44969984	7.65936447	7.33340785
		1.05112079	8.47644379	16.05913534	23.39141318	30.63796544
		2.58885179	11.63268954	21.36987782	31.81271787	57.65679070
		2.90519516	11.21302327	18.46286189	29.56848248	46.84768592
		2.64613799	9.55617100	15.99400478	22.07173524	33.91544704
2	1	0.09996437	3.53480482	6.54931966	7.52435026	6.92760305
		1.07178688	8.36920719	14.84453239	20.90693620	28.61232759
		2.63151536	11.47718373	21.37684602	29.06781603	51.31601157
		3.27347489	12.04655610	20.24692929	29.63070342	44.19445694
		2.72791353	9.73458838	19.89738903	24.57804681	34.11874636
2	2	0.09996437	3.53480498	6.54931869	7.52435031	6.92760306
		1.07178625	8.36920829	14.84452831	20.90693655	28.61232766
		2.63151596	11.47718123	21.37684634	29.06781628	51.31601183
		3.27347483	12.04655624	20.24692940	29.63070341	44.19445825
		2.72791354	9.73458839	19.89738911	24.57804750	34.11881041
3	2	0.09996439	3.53480486	6.54931872	7.52435027	6.92760307
		1.07178624	8.36920720	14.84452854	20.90693648	28.61232788
		2.63151523	11.47718137	21.37684635	29.06781623	51.31601293
		3.27347482	12.04655615	20.24692938	29.63070355	44.19447282
		2.72791354	9.73458844	19.89738947	24.57805811	34.12054039
4	2	0.09996437	3.53480488	6.54931868	7.52435025	6.92760320
		1.07178624	8.36920701	14.84452807	20.90693615	28.61233071
		2.63151523	11.47718132	21.37684600	29.06781615	51.31606819
		3.27347482	12.04655614	20.24692927	29.63070354	44.20036219
		2.72791358	9.73458893	19.89740547	24.57872012	34.08662078

5	2	0.09996437	3.53480483	6.54931868	7.52435050	6.92761450
		1.07178623	8.36920717	14.84456181	20.90726922	28.63586841
		2.63151522	11.47718129	21.37686778	29.06891881	51.40568148
		3.27347488	12.04655715	20.24696187	29.66866967	44.19175781
		2.72791724	9.73464321	19.89775542	24.57611498	34.10580241
1	3	0.10152554	3.52633101	6.57105521	7.47459780	7.28487121
		1.07888396	8.33740893	14.15537362	18.61518694	25.51315164
		2.64973177	11.36382250	21.35870276	25.71545519	42.49745990
		3.35096298	11.86094896	19.72912141	29.62014553	40.14641779
		3.10256819	11.23285628	21.96354795	26.77668026	34.13249244
2	3	0.10152562	3.52632837	6.57105534	7.47459789	7.28487121
		1.07888365	8.33740911	14.15537431	18.61518753	25.51315170
		2.64972917	11.36382288	21.35869589	25.71545786	42.49746014
		3.35096254	11.86094924	19.72912320	29.62014699	40.14641815
		3.10256818	11.23285625	21.96354805	26.77668050	34.13249385
3	3	0.10152554	3.52632847	6.57105522	7.47459842	7.28487123
		1.07888368	8.33740975	14.15537378	18.61519112	25.51315194
		2.64972914	11.36383495	21.35870255	25.71547728	42.49746048
		3.35096272	11.86095083	19.72912143	29.62014751	40.14641779
		3.10256819	11.23285631	21.96354860	26.77668025	34.13256173
4	3	0.10152554	3.52632847	6.57105592	7.47459806	7.28487121
		1.07888368	8.33740969	14.15537369	18.61519244	25.51315206
		2.64972939	11.36382254	21.35869555	25.71545410	42.49746008
		3.35096260	11.86094896	19.72912072	29.62014630	40.14641669
		3.10256818	11.23285939	21.96354792	26.77665979	34.13235592
5	3	0.10152554	3.52632836	6.57105519	7.47459774	7.28487142
		1.07888365	8.33740907	14.15537305	18.61519293	25.51385935
		2.64972913	11.36382257	21.35869547	25.71545667	42.49693899
		3.35096248	11.86095181	19.72912081	29.62014459	40.14639095
		3.10256824	11.23285857	21.99385799	26.77666290	34.13229602
1	4	0.10213156	3.52347672	6.58613628	7.48489157	7.68344093
		1.08163912	8.32652974	13.87956297	16.55603878	22.20577161
		2.65917154	11.32075317	21.35106346	22.73677480	33.77442209
		3.36274878	11.49590964	18.98047420	29.61147020	35.91298592
		3.50614749	11.63254687	20.45548255	26.00370267	34.12442826
2	4	0.10213160	3.52347547	6.58613872	7.48489301	7.68344125
		1.08164064	8.32651402	13.87957602	16.55604674	22.20577408
		2.65917240	11.32076114	21.35106441	22.73680317	33.77442915
		3.36274925	11.49591424	18.98049495	29.61147737	35.91299074
		3.50614760	11.63254789	20.45548611	26.00370585	34.12445013
3	4	0.10213160	3.52347815	6.58613469	7.48489784	7.68344179
		1.08163978	8.32651574	13.87955818	16.55607727	22.20577140
		2.65917137	11.32075006	21.35107654	22.73676612	33.77442671
		3.36275088	11.49592921	18.98046789	29.61145372	35.91298501
		3.50614777	11.63254995	20.45548227	26.00370208	34.12444654
4	4	0.10213159	3.52347755	6.58614236	7.48489952	7.68344134
		1.08163953	8.32652705	13.87955814	16.55603433	22.20577064
		2.65917406	11.32078812	21.35106327	22.73676233	33.77441938
		3.36275190	11.49590896	18.98046531	29.61144691	35.91298376
		3.50614764	11.63254949	20.45548151	26.00370120	34.12442557
5	4	0.10213157	3.52347598	6.58613598	7.48489105	7.68344070
		1.08163912	8.32652037	13.87955774	16.55603458	22.20580475
		2.65917122	11.32075632	21.35106334	22.73676112	33.77438422
		3.36274866	11.49590785	18.98046326	29.61144605	35.91297790
		3.50614742	11.63257688	20.45548018	26.00368273	34.12442680
1	5	0.10238662	3.52238413	6.59487298	7.49000136	7.68932620
		1.08281896	8.32229983	13.77043956	15.16430214	18.98029703
		2.66399712	11.30478047	21.34764155	20.67999406	27.29542106
		3.36862145	11.15340950	18.20046369	29.60718594	31.39284406
		3.51455163	11.50511119	19.26066806	24.84985889	34.11928993

2	5	0.10238664	3.52238802	6.59487330	7.49000581	7.68932177
		1.08281968	8.32229314	13.77044132	15.16432437	18.98034661
		2.66399722	11.30476517	21.34766568	20.68006265	27.29551112
		3.36862305	11.15342183	18.20050974	29.60721186	31.39285980
		3.51455303	11.50510538	19.26070134	24.85005822	34.11931102
3	5	0.10238662	3.52238391	6.59487873	7.49001569	7.68932218
		1.08281900	8.32229538	13.77046991	15.16438713	18.98028634
		2.66399907	11.30479322	21.34782824	20.67996615	27.29545286
		3.36862610	11.15345609	18.20044335	29.60717823	31.39286217
		3.51455023	11.50514951	19.26066745	24.84986873	34.11928290
4	5	0.10238673	3.52238974	6.59489239	7.49000229	7.68932494
		1.08282067	8.32232760	13.77043983	15.16428840	18.98032308
		2.66400395	11.30476440	21.34763282	20.67996595	27.29540979
		3.36862207	11.15340182	18.20044301	29.60717465	31.39267265
		3.51455112	11.50511687	19.26062717	24.84984213	34.11927584
5	5	0.10238663	3.52241061	6.59489031	7.49000277	7.68932471
		1.08281901	8.32236916	13.77046634	15.16429379	18.98027518
		2.66399744	11.30477092	21.34764651	20.67994326	27.29539155
		3.36862153	11.15345946	18.20043247	29.60698589	31.39282868
		3.51455103	11.50510690	19.26065192	24.84984798	34.11928263

Tabelle 6.1: Numerisch berechnete Werte zu einer Basket-Option auf drei Aktien. Die Parameter entstammen aus dem Beispiel 5.2 mit dem Referenzwert $V_{(5,5,5,5)}(80, 80, 80, 0) = 34.11928263$ auf dem Referenzgitter.

In der Tabelle 6.2 sind die relativen Fehler abgetragen.

i_3	k	1	2	3	4	5
1	1	0.99720212	0.89555698	0.81096617	0.77551233	0.78506960
		0.96919277	0.75156465	0.52933265	0.31461256	0.10486117
		0.92412351	0.65905841	0.37367445	0.06775220	0.67210821
		0.91485186	0.67135877	0.45887640	0.13355394	0.36797431
		0.92244603	0.71993537	0.53142206	0.35379999	0.00134861
2	1	0.99720212	0.89555695	0.81096618	0.77551233	0.78506959
		0.96919276	0.75156469	0.52933264	0.31461256	0.10486109
		0.92412351	0.65905841	0.37367445	0.06775220	0.67210848
		0.91485186	0.67135877	0.45887640	0.13355394	0.36797521
		0.92244603	0.71993536	0.53142199	0.35379958	0.00132502
3	1	0.99720212	0.89555698	0.81096618	0.77551233	0.78506957
		0.96919277	0.75156469	0.52933264	0.31461256	0.10486088
		0.92412351	0.65905841	0.37367446	0.06775220	0.67210932
		0.91485186	0.67135877	0.45887640	0.13355394	0.36797828
		0.92244602	0.71993532	0.53142181	0.35379825	0.00126701
4	1	0.99720212	0.89555698	0.81096618	0.77551233	0.78506949
		0.96919277	0.75156469	0.52933265	0.31461256	0.10485930
		0.92412351	0.65905841	0.37367446	0.06775220	0.67211722
		0.91485186	0.67135877	0.45887640	0.13355391	0.36807481
		0.92244600	0.71993503	0.53142023	0.35375333	0.00080588
5	1	0.99720212	0.89555697	0.81096614	0.77551215	0.78506559
		0.96919276	0.75156442	0.52932377	0.31442248	0.10203372
		0.92412350	0.65905820	0.37367154	0.06760297	0.68985941
		0.91485181	0.67135818	0.45887309	0.13337913	0.37305601
		0.92244450	0.71991876	0.53123268	0.35310084	0.00597421
1	2	0.99707015	0.89639862	0.80804638	0.77946927	0.79695930
		0.96858706	0.75470741	0.56492249	0.38723987	0.16140301
		0.92287307	0.66361591	0.37346731	0.14805313	0.50401789
		0.90405792	0.64692821	0.40658397	0.13155550	0.29529268
		0.92004775	0.71468954	0.41682862	0.27964351	0.00001572

2	2	0.99707015	0.89639861	0.80804641	0.77946927	0.79695930
		0.96858708	0.75470738	0.56492261	0.38723986	0.16140301
		0.92287306	0.66361599	0.37346730	0.14805312	0.50401790
		0.90405792	0.64692821	0.40658397	0.13155550	0.29529272
		0.92004775	0.71468953	0.41682862	0.27964349	0.00001384
3	2	0.99707015	0.89639862	0.80804641	0.77946927	0.79695930
		0.96858708	0.75470741	0.56492261	0.38723986	0.16140301
		0.92287308	0.66361598	0.37346730	0.14805312	0.50401793
		0.90405792	0.64692821	0.40658397	0.13155549	0.29529314
		0.92004775	0.71468953	0.41682861	0.27964317	0.00003686
4	2	0.99707015	0.89639862	0.80804641	0.77946927	0.79695930
		0.96858708	0.75470742	0.56492262	0.38723987	0.16140292
		0.92287308	0.66361598	0.37346731	0.14805313	0.50401955
		0.90405792	0.64692821	0.40658397	0.13155549	0.29546575
		0.92004775	0.71468952	0.41682814	0.27962377	0.00095728
5	2	0.99707015	0.89639862	0.80804641	0.77946926	0.79695896
		0.96858708	0.75470741	0.56492163	0.38723011	0.16071306
		0.92287308	0.66361598	0.37346667	0.14802081	0.50664602
		0.90405792	0.64692818	0.40658301	0.13044275	0.29521357
		0.92004764	0.71468793	0.41681788	0.27970013	0.00039509
1	3	0.99702439	0.89664698	0.80740934	0.78092746	0.78648815
		0.96837905	0.75563938	0.58512101	0.45440861	0.25223658
		0.92233917	0.66693841	0.37399907	0.24630727	0.24555549
		0.90178683	0.65236816	0.42176037	0.13186494	0.17664894
		0.90906702	0.67077689	0.35627170	0.21520389	0.00038717
2	3	0.99702439	0.89664705	0.80740933	0.78092746	0.78648815
		0.96837906	0.75563938	0.58512099	0.45440859	0.25223657
		0.92233925	0.66693840	0.37399927	0.24630719	0.24555550
		0.90178684	0.65236815	0.42176032	0.13186490	0.17664895
		0.90906702	0.67077689	0.35627169	0.21520388	0.00038721
3	3	0.99702439	0.89664705	0.80740934	0.78092744	0.78648815
		0.96837906	0.75563936	0.58512100	0.45440848	0.25223657
		0.92233925	0.66693805	0.37399907	0.24630663	0.24555551
		0.90178684	0.65236811	0.42176037	0.13186488	0.17664894
		0.90906702	0.67077689	0.35627168	0.21520389	0.00038920
4	3	0.99702439	0.89664705	0.80740932	0.78092746	0.78648815
		0.96837906	0.75563936	0.58512100	0.45440845	0.25223656
		0.92233924	0.66693841	0.37399928	0.24630730	0.24555550
		0.90178684	0.65236816	0.42176039	0.13186492	0.17664891
		0.90906702	0.67077680	0.35627170	0.21520449	0.00038316
5	3	0.99702439	0.89664705	0.80740934	0.78092747	0.78648814
		0.96837906	0.75563938	0.58512102	0.45440843	0.25221583
		0.92233925	0.66693841	0.37399928	0.24630723	0.24554023
		0.90178684	0.65236808	0.42176039	0.13186497	0.17664815
		0.90906701	0.67077682	0.35538334	0.21520440	0.00038141
1	4	0.99700663	0.89673063	0.80696733	0.78062576	0.77480649
		0.96829830	0.75595824	0.59320472	0.51476006	0.34917238
		0.92206250	0.66820073	0.37422297	0.33360924	0.01010750
		0.90144140	0.66306708	0.44370242	0.13211920	0.05257154
		0.89723853	0.65906238	0.40047149	0.23785904	0.00015081
2	4	0.99700663	0.89673067	0.80696726	0.78062572	0.77480648
		0.96829826	0.75595870	0.59320434	0.51475982	0.34917230
		0.92206248	0.66820049	0.37422294	0.33360841	0.01010729
		0.90144138	0.66306694	0.44370182	0.13211899	0.05257168
		0.89723853	0.65906235	0.40047139	0.23785895	0.00015145
3	4	0.99700663	0.89673059	0.80696737	0.78062558	0.77480647
		0.96829828	0.75595865	0.59320487	0.51475893	0.34917238
		0.92206251	0.66820082	0.37422258	0.33360949	0.01010736
		0.90144134	0.66306650	0.44370261	0.13211969	0.05257151
		0.89723853	0.65906229	0.40047150	0.23785906	0.00015135

4	4	0.99700663	0.89673061	0.80696715	0.78062553	0.77480648
		0.96829829	0.75595832	0.59320487	0.51476019	0.34917241
		0.92206243	0.66819970	0.37422297	0.33360960	0.01010758
		0.90144131	0.66306710	0.44370269	0.13211989	0.05257148
		0.89723853	0.65906231	0.40047152	0.23785909	0.00015073
5	4	0.99700663	0.89673065	0.80696734	0.78062578	0.77480650
		0.96829830	0.75595852	0.59320488	0.51476018	0.34917141
		0.92206251	0.66820063	0.37422297	0.33360964	0.01010861
		0.90144140	0.66306713	0.44370275	0.13211991	0.05257131
		0.89723854	0.65906150	0.40047156	0.23785963	0.00015077
1	5	0.99699916	0.89676266	0.80671127	0.78047600	0.77463400
		0.96826372	0.75608222	0.59640302	0.55555038	0.44370762
		0.92192107	0.66866887	0.37432326	0.39389130	0.20000015
		0.90126928	0.67310539	0.46656371	0.13224477	0.07990902
		0.89699222	0.66279739	0.43549024	0.27167698	0.00000021
2	5	0.99699916	0.89676254	0.80671126	0.78047587	0.77463413
		0.96826370	0.75608241	0.59640296	0.55554973	0.44370616
		0.92192107	0.66866932	0.37432255	0.39388929	0.19999751
		0.90126923	0.67310503	0.46656236	0.13224401	0.07990856
		0.89699218	0.66279756	0.43548926	0.27167114	0.00000083
3	5	0.99699916	0.89676266	0.80671110	0.78047558	0.77463412
		0.96826372	0.75608235	0.59640213	0.55554789	0.44370793
		0.92192101	0.66866850	0.37431779	0.39389212	0.19999922
		0.90126914	0.67310403	0.46656430	0.13224500	0.07990849
		0.89699226	0.66279627	0.43549026	0.27167669	0.00000001
4	5	0.99699915	0.89676249	0.80671070	0.78047597	0.77463404
		0.96826367	0.75608140	0.59640301	0.55555078	0.44370685
		0.92192087	0.66866934	0.37432352	0.39389212	0.20000048
		0.90126926	0.67310562	0.46656431	0.13224510	0.07991405
		0.89699223	0.66279722	0.43549144	0.27167747	0.00000020
5	5	0.99699916	0.89676188	0.80671076	0.78047596	0.77463405
		0.96826372	0.75608018	0.59640223	0.55555063	0.44370826
		0.92192106	0.66866915	0.37432311	0.39389279	0.20000101
		0.90126927	0.67310393	0.46656462	0.13225063	0.07990947
		0.89699224	0.66279751	0.43549071	0.27167730	0.00000000

Tabelle 6.2: Relative Fehler zu einer Basket-Option auf drei Aktien. Die Parameter entstammen aus dem Beispiel 5.2 mit dem Referenzwert $V_{(5,5,5,5)}(80, 80, 80, 0) = 34.11928263$ auf dem Referenzgitter.

Selbständigkeitserklärung:

Ich erkläre, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig und nur unter Verwendung der angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe.

Jena, 05.01.2005

....

(Unterschrift des Verfassers)