



Numerische Behandlung von Contingent Claims

DIPLOMARBEIT

zur Erlangung der akademischen Grades

Diplom-Wirtschaftsmathematiker

FRIEDRICH-SCHILLER-UNIVERSITÄT JENA

Fakultät für Mathematik und Informatik

eingereicht von Mathias Langner

geb. am 19.08.1981

Betreuer: Prof. Dr. G. Zumbusch

Jena, 2. März 2007

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit der numerischen Evaluierung von zweidimensionalen Finanzderivaten. Dafür werden zunächst partielle Differentialgleichungen vorgestellt, die die Entwicklung dieser Derivate beschreiben. Zur Diskretisierung der Differentialgleichungen wird eine finite Volumen Methode verwendet.

Im Laufe der Arbeit werden an dem Verfahren einige Modifikationen vorgenommen. Zunächst wird auf Konvektionsdominanz eingegangen. Um stabile Verfahren mit hoher Konvergenz zu erhalten, werden zwei flux-Limiter vorgestellt: Der van Leer und van Albada Limiter. Da es sich bei beiden Limitern um TVD-Schemata handelt und diese höchstens lineare Konvergenz erreichen, werden modifizierte Limiter-Schemata entwickelt, eine Kombination aus zentralen Differenzen und flux-Limitern.

Eine weitere Veränderung des Verfahrens besteht in der Gittermodifikation. Gradiente Gitter erlauben eine gezielte lokale Verfeinerung bei gleich bleibender Anzahl an Diskretisierungspunkten.

Dünne Gitter verfolgen einen Ansatz mit hierarchischen Basen und erlauben eine Berechnung mit wesentlich weniger Speicheraufwand, aber einer nur in geringem Maße schlechteren Fehlerentwicklung. Ein Nachteil dünner Gitter besteht in recht komplizierten Strukturen, die durch die hierarchischen Basen entstehen. Eine Alternative ist die Kombinationstechnik, die das Gesamtproblem in mehrere Teilprobleme zerlegt, welche wiederum mit bekannten Verfahren gelöst werden können. Die Entwicklung des Fehlers ist äquivalent zu dem auf dünnen Gittern.

„Always try! Fail! Try again! Fail better!“

Samuel Beckett

Inhaltsverzeichnis

Symbolverzeichnis	6
Danksagung	8
1 Einleitung	9
2 Grundlagen der Finanzmarkttheorie	11
2.1 Basiswerte	11
2.2 Optionen	13
2.3 Mehrdimensionale Derivate	15
2.3.1 Worst of two assets Optionen	16
2.3.2 Asiatische Optionen	17
2.3.3 Wandelanleihen	19
3 Finite Volumen	21
3.1 Zerlegung des Grundgebietes	21
3.2 Diskretisierung	22
4 Konvektionsdominanz	25
4.1 Upwind-Diskretisierung	26
4.1.1 Der eindimensionale Fall	26
4.1.2 Der zweidimensionale Fall	28
4.2 Flux-Limiter	30
5 Modifikation der Gitter	32
5.1 Gradierte Gitter	32
5.2 Die Kombinationsmethode	34
5.2.1 Hierarchische Basen	34
5.2.2 Die Kombinationstechnik	37

<i>INHALTSVERZEICHNIS</i>	5
6 Diskretisierung der Derivate	40
6.1 Innere Punkte	40
6.2 Randpunkte	42
6.3 Diskretisierung mit flux-Limitern	42
7 Numerische Tests	44
7.1 Worst of two assets Optionen	44
7.2 Asiatische Optionen	49
7.3 Wandelanleihen	51
8 Schlußbemerkung	54
Literaturverzeichnis	56
Abbildungsverzeichnis	59
Tabellenverzeichnis	60
A Positives Koeffizienten Schema	62

Symbolverzeichnis

t	Zeit
Δt	diskreter Zeitschritt
T	Verfallsdatum
$S, S(t)$	Kurs des Basiswertes
$A, A(S, t)$	Durchschnitt des Basiswertes S über eine gewisse Zeit t
U	Wert des Derivates
E	Ausübungspreis
r	risikofreier Zinssatz
λ	Preis des Zinsrisikos
F	Nennwert einer Anleihe
ω	Tauschfaktor für Wandelanleihen
C_P	Rückkaufpreis einer Wandelanleihe
μ	Drift
σ	Volatilität
ρ	Korrelationskoeffizient
$X(t)$	stochastischer Prozess
$W(t)$	Wienerprozess
V	Geschwindigkeits- / Konvektionsvektor
D	Diffusionsmatrix
P	Penaltyterm
h	Schrittweite im Ort
h_k	Schrittweite im Ort auf dünnen Gittern, entspricht 2^{-k}
x_{ij}	Punkt (h_i, h_j)
U_{ij}^n	Wert des diskretisierten Derivates im Punkt x_{ij} zur Zeit n
Ω	betrachtetes Grundgebiet aus \mathbb{R}^n
$\bar{\Omega}$	Abschluss von Ω
$\partial\Omega, \Gamma$	Rand von Ω
Ω_{ij}	Kontrollvolumen um den Punkt x_{ij}
$\partial\Omega_{ij}, \Gamma_{ij}$	Rand des Kontrollvolumens um den Punkt x_{ij}
$\partial\Omega_{ij}^k, \Gamma_{ij}^k$	einzelnes Randstück des Kontrollvolumens mit $k = l, r, u, d$
$\Omega^{i,j}$	Gitter mit Schrittweite 2^{-i} in x- und 2^{-j} in y-Richtung
\vec{n}	äußere Einheitsnormale auf den Rand
\vec{n}_k	äußere Einheitsnormale auf einzelnes Randstück mit $k = l, r, u, d$
∇	Gradient

Δ	Laplace-Operator
L	Differentialoperator
L_h	Differenzenoperator
u	Lösung einer partiellen Differentialgleichung
u_{ij}	numerische Lösung einer partiellen Differentialgleichung im Punkt x_{ij}
u^{ij}	numerische Lösung einer partiellen Differentialgleichung auf Ω^{ij}
ϵ	Diffusionskoeffizient
v	Konvektionskoeffizient bzw. Konvektionsvektor
$\ \cdot\ _{\infty,h}$	diskrete Maximumnorm
$\ \cdot\ _{2,h}$	diskrete L_2 -Norm
Pe	Péclet-Zahl
η	Gradierungsparameter
H_η	Gradierungsfunktion
φ, φ_{ij}^k	nodale Basisfunktion, Lagrangefunktion
B_k^n	nodale Basis
B_k^h	hierarchische Basis
T_k	Teilräume der hierarchischen Basis

Abkürzungen

PDG	partielle Differentialgleichung
SDG	stochastische Differentialgleichung

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich die Gelegenheit wahrnehmen und mich für die intensive Betreuung bei Herrn Prof. Dr. Zumbusch bedanken, der mich sehr oft mit Hinweisen und Ideen im Prozess dieser Arbeit voranbrachte. Sehr dankbar bin ich auch für die Möglichkeit, den Cluster des Instituts für angewandte Mathematik an der Universität Jena nutzen zu dürfen und möchte hier vor allem Herrn Frank Peuker nennen, der mich bei der Implementierung der Programme unterstützte.

Weiterhin danke ich Juliane Roßbach, Stephanie Weiland und meiner Schwester Marianne fürs aufmerksame Korrekturlesen und wertvollen Hinweisen hinsichtlich der Gestaltung der Arbeit.

Zuletzt danke ich besonders meinen Eltern und meinen Großeltern, die mich während meines Studiums unterstützten, wo sie nur konnten.

Jena, im März 2007
Mathias Langner

1 Einleitung

Partielle Differentialgleichungen nehmen einen immer höheren Stellenwert in den Wirtschafts- und Finanzwissenschaften ein. Neben den Naturwissenschaften hat sich *Computational Finance* schon vor einigen Jahren als weiteres umfangreiches Anwendungsgebiet dieser Gleichungen etabliert. Dabei nimmt die Wichtigkeit der Beschreibung von Wertpapierkursen und Finanzprodukten stetig zu, während sich auch die Forschung mittlerweile ausgiebig diesem Thema widmet. Ansatzpunkt zur Lösung der Differentialgleichungen sind dabei sehr häufig finite Differenzen und finite Elemente. Die vorliegende Arbeit behandelt eine alternative Methode: Finite Volumen. Diese sind hier sinnvoll, weil die behandelten Finanzprodukte zweidimensionale Derivate sind, d.h. die Auszahlung hängt von zwei Basiswerten ab.

In der vorliegenden Arbeit wird ein Verfahren zur numerischen Lösung solcher zweidimensionaler Derivate bzw. ihrer zugrunde liegenden Differentialgleichungen entwickelt. Wie sich zeigen wird, gehören diese der Klasse singular gestörter Probleme an. Im konvektionsdominanten Fall führen diese Probleme zu Instabilitäten. Nun sind in der Finanzwissenschaft konvektionsdominierte Gleichungen keine Seltenheit. Daher werden flux-Limiter benutzt, um dieses Problem zu beheben.

Weiterhin führen Derivate durch *Knicke* in den Anfangsbedingungen zu Singularitäten, welche wiederum zu Stabilitäts- und Konvergenzproblemen führen können. Um diesen zu begegnen, besteht eine Möglichkeit in der Verfeinerung des Diskretisierungsgitters. Dies hat allerdings einen erhöhten Speicheraufwand zur Folge und unter Umständen ist es auch gar nicht nötig, auf dem gesamten Gitter mit kleinen Schrittweiten zu rechnen. Daher werden gradierte Gitter eingeführt, die lokal um kritische Stellen die Schrittweite verfeinern, dabei aber die Anzahl an Diskretisierungspunkten nicht verändern.

Weiterhin ist natürlich auch in der Bewertung von Finanzderivaten der Spagat zwischen Fehlerentwicklung und Rechenzeit ein großes Problem. Trotz der Tatsache, dass die heutigen Rechner stetig leistungsfähiger werden, ist man an schnellen Verfahren interessiert, die aber andererseits den Fehler begrenzt lassen. Eine Möglichkeit bietet dabei die Kombinationstechnik, bei der das Problem in mehrere Teilprobleme zerlegt wird. Diese werden auf groben Teilgittern gelöst und die Lösungen zum Schluss wieder kombiniert. Der daraus entstehende Fehler ist nur unwesentlich größer als der auf vollen Gittern.

In Kapitel 2 dieser Arbeit wird eine kurze Einführung in die Finanzmarkttheorie gegeben und die behandelten Derivate vorgestellt. In Kapitel 3 wird sich mit der finiten Volumen Methode beschäftigt. Danach werden Modifikationen an dem Verfahren vorgenommen, um der Konvektionsdominanz zu begegnen (Kapitel 4) und gradierte Gitter sowie die Kombinationsmethode eingeführt (Kapitel 5). In Kapitel 6 werden die Derivate entsprechend diskretisiert und schließlich werden in Kapitel 7 die Verfahren getestet.

Alle in Kapitel 7 verwendeten Programme sind der Arbeit in elektronischer Form als CD-ROM beigefügt. Alle Programme liegen als matlab-Dateien vor.

2 Grundlagen der Finanzmarkttheorie

Zunächst soll eine kurze Einführung in die Theorie der Finanzmärkte gegeben werden. Auf allzu große Ausführlichkeit wird dabei verzichtet, da dies den Umfang der Arbeit sprengen würde. Vielmehr werden wichtige Begriffe definiert und für die Arbeit relevante Annahmen gemacht. Des Weiteren werden die später behandelten Finanzderivate vorgestellt.

2.1 Basiswerte

Da die preisliche Entwicklung einer Option unmittelbar von ihrem Basiswert abhängt, soll zunächst das zugrunde liegende Wertpapier genauer betrachtet werden. Es existiert mittlerweile eine Vielzahl von Werten und Gegenständen, die die Basis von Optionsgeschäften bilden. Neben Aktien und festverzinslichen Wertpapieren sind beispielsweise Rohstoffe, Devisen und Grundstücke denkbar. Sogar Wetterderivate werden heute gehandelt. Es soll sich jedoch zunächst auf beliebige, an Börsen gehandelte Papiere beschränkt werden.

Für Finanzmärkte und den auf ihnen gehandelten Produkte gilt die so genannte „Effizienzmarkthypothese“. Diese hat folgende zentrale Aussagen:

1. Der Markt bzw. seine Teilnehmer reagieren umgehend auf alle ankommenden Informationen.
2. Die vergangene Entwicklung eines Wertpapierpreises ist bereits im augenblicklichen Kurs enthalten und nicht von Relevanz für die zukünftige Entwicklung.

Aussage 2 ist fundamental für die Entwicklung eines Wertpapierkurses. Diese besagt, dass der Preis eines Wertpapiers einem *Markov-Prozess* folgt (siehe dazu Seydel [19, 18]). Sei $S(t)$ der Preis eines börsengehandelten Wertpapiers zum Zeitpunkt t (im weiteren Text wird der zeitliche Parameter t weggelassen, wenn Missverständnisse ausgeschlossen sind). Für einen Zeitpunkt $t_1 > t^*$ hängt $S(t_1)$ lediglich von $S(t^*)$ ab und ist stochastisch unabhängig von $S(t_2)$ mit $t_2 < t^*$.

Es soll nun die Änderung des Wertpapierpreises näher betrachtet werden, was schließlich zum Begriff der stochastischen Differentialgleichung (SDG) führt. Da Wertpapierkurse im Zeitverlauf mehr oder weniger stark schwanken, ist deren Beschreibung durch rein deterministische Differentialgleichungen unrealistisch. Viel-

mehr muss ein stochastischer Einfluss in die Differentialgleichung aufgenommen werden. Die folgende Gleichung beschreibt eine solche SDG:

$$\frac{dx}{dt} = a(x, t) + b(x, t)X(t).$$

Dabei steht a für den deterministischen und $bX(t)$ mit dem allgemeinen stochastischen Prozess $X(t)$ für den stochastischen Teil (vgl. Seydel [19, 20f.]). Eine spezielle SDG bildet die Itô Stochastische Differentialgleichung:

$$dx = a(x, t)dt + b(x, t)dW_t. \quad (1)$$

$a(x, t)dt$ wird Driftterm genannt, $b(x, t)dW_t$ heißt Diffusionsterm. Es gilt

$$dW_{t^*} \equiv W(t^* + t) - W(t),$$

wobei W einen Wiener-Prozess beschreibt, ein spezieller (stetiger) Markov-Prozess mit folgenden Eigenschaften:

- dW ist eine normalverteilte Zufallsvariable.
- dW hat Erwartungswert 0 und Varianz dt .
- Für $0 \leq t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$ sind die Zuwächse $W(t_2) - W(t_1)$ und $W(t_4) - W(t_3)$ voneinander stochastisch unabhängig.

Sei nun S zum Startzeitpunkt 0 und einem späteren Zeitpunkt $t > 0$ betrachtet. Dann bezeichnet dS die daraus resultierende Änderung des Wertpapierkurses: $dS \equiv S(t) - S(0)$. Statt die Bewegung des absoluten Wertpapierkurses zu betrachten, interessiert viel mehr die relative Änderung, der so genannte *Return* dS/S . Dieser lässt sich durch eine Itô Stochastische Differentialgleichung der folgenden Form darstellen:

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dW. \quad (2)$$

Im Vergleich zu (1) gilt also $a(S, t) = \mu S$ mit der Drift μ sowie $b(S, t) = \sigma S$; σ heißt Volatilität und beschreibt die Varianz der zeitlichen Änderung. Stochastische Prozesse der Form (2) heißen *geometrische Brownsche Bewegung* (vgl. dazu Seydel [19, 18-24] und Wilmott et. al. [23, 18-22]).

Schließlich müssen noch einige Annahmen definiert werden, die standardmäßig in den meisten Finanzmarktmodellen vorkommen. Diese lauten:

- Es existieren keine Transaktionskosten und keine Steuern.

- Der Zins für Kredite ist genauso hoch wie der Zins für Spareinlagen.
- Es sind *short*-Geschäfte möglich, d.h. der Verkauf geliehener Papiere.

Siehe dazu auch Stulz [21, 163].

2.2 Optionen

Unter einer *Option* (oder auch *Derivat*) versteht man eine Art Wette auf den weiteren Kursverlauf des Basiswertes. Optionen sind mit einer festen Laufzeit ausgestattet und spätestens am Ende der Laufzeit zum Verfallsdatum T wird eine Entscheidung getroffen, ob die Option ausgeübt wird oder verfällt. Da Optionen während der Laufzeit selbst an der Börse, spezieller der Terminbörse, gehandelt werden, ist eine Evaluierung des Optionswertes zu jedem Zeitpunkt $0 \leq t \leq T$ äußerst wichtig. Die vorliegende Arbeit bezieht sich auf die Sicht des Inhabers eines Derivates und nicht auf die des Emittenten.

Für den Wert U einer Option ist die Ausstattung entscheidend, das heißt, die Regeln, nach denen über Ausübung oder Verfall entschieden wird. Generell unterscheidet man zwei große Klassen von Optionen: Die Kaufoptionen (*Call*) und die Verkaufsoptionen (*Put*).

Zunächst soll der *europäische Call* genauer betrachtet werden. Europäische Optionen zeichnen sich dadurch aus, dass eine Ausübung nur zum vorher festgelegten Verfallsdatum T möglich ist. Im Gegensatz dazu ist bei *amerikanischen Optionen* eine Ausübung bereits zu einem früheren Zeitpunkt $t \leq T$ möglich. Auf amerikanische Optionen wird später eingegangen. Der Besitzer eines europäischen Calls hat nun das Recht zum Zeitpunkt T das Basispapier zu einem vorher festgelegten *Ausübungspreis* E zu kaufen. Maßgeblich für die Entscheidung, die Option auszuüben oder verfallen zu lassen, ist der Preis des Basiswertes am Verfallstag, also $S(T)$. Der Inhaber wird die Option natürlich nur ausüben, wenn $S(T) > E$. Der Gewinn, der aus diesem Optionsgeschäft erzielt wird, beträgt $S(T) - E$. Im umgekehrten Fall $S(T) \leq E$ verfällt das Derivat, da das Papier an der Börse billiger erworben werden kann. Der Wert U_C eines Calls beträgt also:

$$U_C(S, T) = \begin{cases} 0 & \text{falls } S(T) \leq E \\ S(T) - E & \text{falls } S(T) > E \end{cases}$$

oder

$$U_C(S, T) = \max(S(T) - E, 0).$$

Der Wert eines europäischen Calls zum Verfallsdatum T ist in Abbildung 1 dargestellt.

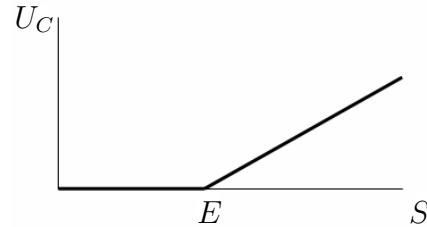


Abbildung 1: Wert eines europäischen Calls zum Zeitpunkt T

Der Put bildet das Gegenstück zum Call. Durch den Kauf eines Puts erwirbt der Käufer das Recht, das Basispapier zum Preis E zu verkaufen. Die Wertermittlung eines Puts zum Zeitpunkt T ist genau umgekehrt zu der eines Calls. Der Inhaber wird die Option nur ausüben, wenn $S(T) < E$. Der Optionswert beträgt in diesem Fall $E - S(T)$. Die Option verfällt im Falle $S(T) \geq E$, der Basiswert lässt sich an der Börse teurer verkaufen. Es gilt also:

$$U_P(S, T) = \begin{cases} E - S(T) & \text{falls } S(T) < E \\ 0 & \text{falls } S(T) \geq E \end{cases}$$

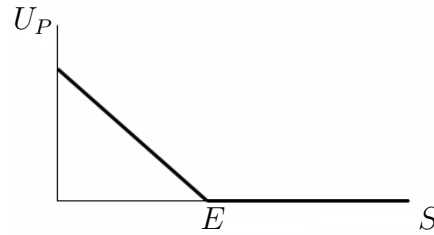
oder

$$U_P(S, T) = \max(E - S(T), 0)$$

(siehe Seydel [19, 1-3]). Abbildung 2 zeigt den Wert eines europäischen Puts zum Zeitpunkt T . Ein Unterschied zwischen Put und Call besteht darin, dass ein Call theoretisch unbeschränkt im Wert steigen kann, während der Wert eines Puts beschränkt ist. Er erreicht höchstens den Ausübungskurs E .

Der Wert einer amerikanischen Option zum Verfallsdatum T entspricht exakt dem einer europäischen Option mit sonst identischer Ausstattung. Da aber, wie bereits erwähnt, amerikanische Optionen die Möglichkeit bieten, das Derivat schon vor T auszuüben, sind diese zu einem Zeitpunkt $t < T$ mindestens genauso wertvoll wie ihr europäisches Pendant.

Es ist deutlich geworden, dass der Wert einer Option in erster Linie vom Kurs des Basiswertes sowie von der (bis zur Fälligkeit verbleibenden) Zeit abhängt. Darüber hinaus existieren noch andere Faktoren, die die Entwicklung der Option beeinflussen. Der Wichtigste ist der risikofreie Zinssatz r , den man für ein Investment in risikolose festverzinsliche Wertpapiere bekommt. Es scheint logisch, dass die meisten Basiswerte wie beispielsweise Aktien stark von r abhängen. Wird ein hoher Zins

Abbildung 2: Wert eines europäischen Puts zum Zeitpunkt T

gezahlt, so werden viele Anleger ihr Geld eher in risikolose Papiere umschichten, die Nachfrage nach Aktien sinkt und dementsprechend auch deren Kurs. Über den Basiswert hat r demnach auch einen nicht unerheblichen Einfluss auf den Wert einer Option. Aus diesem Grund ist in den meisten Modellen zur Optionspreisbestimmung auch r als Faktor enthalten.

Die beschriebenen Optionen werden auch *plain-vanilla* Optionen genannt. Sie bilden die einfachsten Formen von Derivaten, allerdings bei Weitem nicht die Einzigen. Es existiert eine Vielzahl von so genannten *exotischen Optionen*, deren Ausübung nach bestimmten Regeln erfolgt. Eine Auswahl an weiteren Optionsformen wie beispielsweise Lookback Optionen oder Barrier Optionen findet man unter anderem in Wilmott et. al. [23].

2.3 Mehrdimensionale Derivate

Allen bisher betrachteten Optionen liegt lediglich ein einziger Basiswert zugrunde. Es sind aber auch Derivate denkbar, die von mehreren Basiswerten oder anderen Faktoren abhängen. Die Entwicklung des Optionswertes lässt sich dann auf folgende partielle Differentialgleichung (PDG) zurückführen:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -V \cdot \nabla U + (D\nabla) \cdot \nabla U - rU + P. \quad (3)$$

V ist hierbei der Geschwindigkeitsvektor, D heißt Diffusionsmatrix. t wird definiert als die Zeit, die vom jetzigen Zeitpunkt t^* bis zum Ausübungsdatum T verbleibt: $t \equiv T - t^*$. Dabei wird t in Jahren gemessen. P in (3) definiert einen *Penaltyterm*. Dieser ist notwendig, um bestimmte Nebenbedingungen zu erzwingen, beispielsweise für amerikanische Optionen, um so die Möglichkeit einer frühzeitigen Ausübung in das Modell einzubinden. Im einfachen Fall einer europäischen Option ohne weitere Sonderausstattungen ist $P = 0$ (siehe dazu auch Zvan et. al. [26, 705-707] und [25, 204-208]).

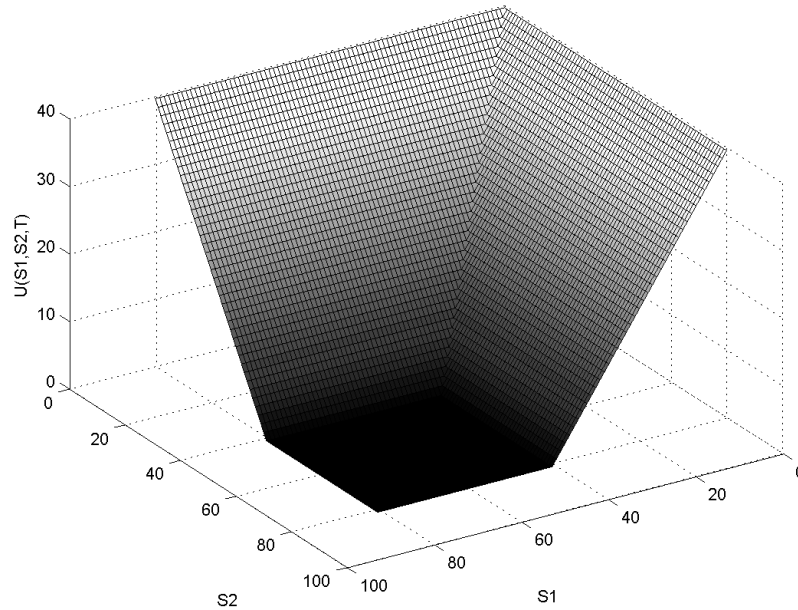


Abbildung 3: Wert eines *worst of two assets* Puts zum Zeitpunkt T

Im Folgenden werden zwei zweidimensionale Optionen vorgestellt, sowie eine Wandelanleihe, die ebenfalls mit der PDG (3) gelöst werden kann.

2.3.1 Worst of two assets Optionen

Es sei eine Option betrachtet, die von dem Kursverlauf zweier Basiswerte S_1 und S_2 abhängt. Die Ausübungsbedingung ist eine *worst of two assets* Regelung. Das bedeutet, dass der Inhaber das Recht hat, denjenigen Basiswert zum vereinbarten Ausübungspreis zu kaufen (Call) bzw. zu verkaufen (Put), dessen Kurs der Niedrigere von beiden ist. Zum Verfallsdatum T hat ein *worst of two assets Call* also folgenden Wert:

$$U_C(S_1, S_2, T) = \max(\min(S_1, S_2) - E, 0). \quad (4)$$

Für einen *worst of two assets Put* gilt dementsprechend:

$$U_P(S_1, S_2, T) = \max(E - \min(S_1, S_2), 0). \quad (5)$$

Abbildung 3 zeigt die Auszahlungsfunktion eines *worst of two assets* Puts zum Zeitpunkt T mit einem Ausübungskurs von 40 (wie bereits erwähnt, ist die Unterscheidung amerikanisch oder europäisch zum Verfallsdatum T für den Wert der Option nicht von Bedeutung).

Sowohl S_1 als auch S_2 folgen einer geometrischen Brownschen Bewegung gemäß (2). Es gilt also:

$$dS_1 = \mu_1 S_1 dt + \sigma_1 S_1 dW_1 \quad (6)$$

sowie

$$dS_2 = \mu_2 S_2 dt + \sigma_2 S_2 dW_2. \quad (7)$$

Dabei hängen die beiden Wiener-Prozesse W_1 und W_2 über einen Korrelationskoeffizienten ρ zusammen. Es ist

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial S_1} \\ \frac{\partial}{\partial S_2} \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Außerdem gilt für den Geschwindigkeitsvektor V

$$V = - \begin{pmatrix} rS_1 \\ rS_2 \end{pmatrix} \quad (9)$$

sowie für den Diffusionstensor D

$$D = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_1^2 S_1^2 & \rho \sigma_1 \sigma_2 S_1 S_2 \\ \rho \sigma_1 \sigma_2 S_1 S_2 & \sigma_2^2 S_2^2 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Des Weiteren gelten für U folgende Randbedingungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} &= \frac{1}{2} \sigma_2^2 S_2^2 \frac{\partial^2 U}{\partial S_2^2} + rS_2 \frac{\partial U}{\partial S_2} - rU + P \quad \text{für } S_1 \rightarrow 0, \\ \frac{\partial U}{\partial t} &= \frac{1}{2} \sigma_2^2 S_2^2 \frac{\partial^2 U}{\partial S_2^2} + rS_2 \frac{\partial U}{\partial S_2} - rU + P \quad \text{für } S_1 \rightarrow \infty, S_1 \neq S_2, \\ \frac{\partial U}{\partial t} &= \frac{1}{2} \sigma_1^2 S_1^2 \frac{\partial^2 U}{\partial S_1^2} + rS_1 \frac{\partial U}{\partial S_1} - rU + P \quad \text{für } S_2 \rightarrow 0, \\ \frac{\partial U}{\partial t} &= \frac{1}{2} \sigma_1^2 S_1^2 \frac{\partial^2 U}{\partial S_1^2} + rS_1 \frac{\partial U}{\partial S_1} - rU + P \quad \text{für } S_2 \rightarrow \infty, S_1 \neq S_2 \end{aligned} \quad (11)$$

sowie

$$U(S_1, S_2, t) = 0 \quad \text{für } S_1, S_2 \rightarrow \infty, S_1 = S_2. \quad (12)$$

Somit ist die Entwicklung von $U(S_1, S_2, t)$ über der Zeit t durch (8) bis (12) erklärt. Stulz [21, 163-167] hat für dieses Modellproblem eine analytische Lösung angegeben, deshalb eignen sich worst of two assets Optionen gut als Testfall.

2.3.2 Asiatische Optionen

Die Auszahlung einer asiatischen Option hängt neben dem Preis S des zugrunde liegenden Wertpapiers auch von dessen Durchschnitt A über eine gewisse Zeit t ab, wobei A natürlich in direktem Zusammenhang mit S steht, denn es gilt

$$A(S, t) = \frac{1}{t} \int_0^t S(\tau) d\tau. \quad (13)$$

Betrachtet werden sollen hier nur so genannt *fixed strike* Optionen, deren Auszahlung zum Zeitpunkt $t = T$ für einen Call

$$U_C(S, A, T) = \max(A - E, 0) \quad (14)$$

lautet. Für einen Put ergibt sich dementsprechend

$$U_P(S, A, T) = \max(E - A, 0). \quad (15)$$

S folgt wieder einer geometrischen Brownschen Bewegung gemäß Gleichung (2). Des Weiteren folgt die Option wieder einer partiellen Differentialgleichung der Form (3), allerdings mit folgenden Parametern:

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial S} \\ \frac{\partial}{\partial A} \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Der Geschwindigkeitsvektor lautet

$$V = - \begin{pmatrix} rS \\ \frac{S-A}{T-t} \end{pmatrix} \quad (17)$$

und die Diffusionsmatrix

$$D = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma^2 S^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Zu beachten ist, dass in der PDG die Diffusion lediglich in eine Richtung wirkt, da in der Diffusionsmatrix bis auf den Ersten alle Einträge gleich Null sind.

Die Randbedingungen für asiatische Optionen lauten:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} &= -\frac{A}{T-t} \frac{\partial U}{\partial A} - rU \quad \text{für } S \rightarrow 0, \\ \frac{\partial U}{\partial t} &= \left(\frac{S-A}{T-t} \right) \frac{\partial U}{\partial A} \quad \text{für } S \rightarrow \infty, S \neq A, \\ \frac{\partial U}{\partial t} &= \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 U}{\partial S^2} + rS \frac{\partial U}{\partial S} + \left(\frac{S}{T-t} \right) \frac{\partial U}{\partial A} - rU \quad \text{für } A \rightarrow 0, \\ \frac{\partial U}{\partial t} &= \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 U}{\partial S^2} + rS \frac{\partial U}{\partial S} + \left(\frac{S-A}{T-t} \right) \frac{\partial U}{\partial A} - rU \quad \text{für } A \rightarrow \infty, A \neq S \end{aligned} \quad (19)$$

sowie

$$U(S, A, t) = A - Ee^{-rt} \quad \text{für } S, A \rightarrow \infty, S = A \quad (20)$$

(siehe hierzu Zvan et. al. [26, 707-709]). Bemerkenswert ist, dass in einigen Randbedingungen ($S \rightarrow 0$, $S \rightarrow \infty$) keine zweiten Ableitungen vorkommen. Die Randbedingungen für die Fälle $A \rightarrow 0$ bzw. $A \rightarrow \infty$ hängen wiederum nicht ausschließlich von S ab, sondern durch $\frac{\partial U}{\partial A}$ auch von dessen Durchschnitt A .

2.3.3 Wandelanleihen

Bei Wandelanleihen handelt es sich um Industriefinanzierungen, wobei der Besitzer des Papiers das Recht hat, diese Anleihen gegen eine bestimmte festgesetzte Anzahl an Aktien des Emittenten zu tauschen. Die Faktoren, die dabei den Optionswert unmittelbar beeinflussen, sind der risikofreie Zinssatz r und der Aktienkurs S des emittierenden Unternehmens. Während S erneut einer Entwicklung entsprechend (2) folgt, wird die Entwicklung von r folgendermaßen beschrieben:

$$dr = a(b - r)dt + \sigma_r r^c dW_r. \quad (21)$$

Dabei sind die Parameter a , b , σ_r und c jeweils positiv. Der Wiener-Prozess der Aktie W_S und derjenige des Zinssatzes W_r sind wieder über den Korrelationskoeffizienten ρ gekoppelt. Für die Parameter der Gleichung (3) ergibt sich:

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial S} \\ \frac{\partial}{\partial r} \end{pmatrix}, \quad (22)$$

$$D = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_S^2 S^2 & \rho \sigma_S \sigma_r S r^c \\ \rho \sigma_S \sigma_r S r^c & \sigma_r^2 r^{2c} \end{pmatrix} \quad (23)$$

sowie

$$V = - \begin{pmatrix} rS \\ a(b - r) - \lambda \sigma_r r^c \end{pmatrix}. \quad (24)$$

λ steht für den Preis des Zinsrisikos.

Die Anleihe hat nun folgende Auszahlungsfunktion zum Zeitpunkt T :

$$U(S, r, T) = \max(F, \omega S). \quad (25)$$

ω gibt an, in wie viele Aktien eine Anleihe getauscht werden kann und F ist der Nennwert der Anleihe. Außerdem ist es dem Emittenten möglich, die Anleihe zu jeder Zeit $t < T$ zum aktuellen Preis C_P zurückzukaufen, wodurch die Anleihe ein so genanntes *call feature* bekommt. Aufgrund dessen wird der Wert der Anleihe mindestens genauso hoch sein wie das Aktienpaket, in das sie getauscht werden kann:

$$U(S, r, t) \geq \omega S. \quad (26)$$

Außerdem wird der Anleihewert immer weniger oder höchstens genauso viel Wert sein wie der Rückkaufpreis C_P :

$$U(S, r, t) \leq C_P. \quad (27)$$

Das ist eine Schlussfolgerung aus der Möglichkeit für den Emittenten, das Papier zum Preis C_P zurückzukaufen. Ist der Wert der Anleihe größer als der Rückkaufpreis, so wäre es für den Ausgeber des Papiers optimal, zu diesem Zeitpunkt das Papier zurückzukaufen.

Bei Wandelanleihen unterscheidet man nicht zwischen Put und Call. Es werden schließlich keine Papiere zum Kauf oder Verkauf angeboten. Der Inhaber muss lediglich entscheiden, ob er die Anleihe behält oder gegen ω Aktien des Emittenten eintauscht. Die Option verfällt also nicht in dem Sinne, wie das bei den bisher vorgestellten Optionen der Fall war.

Letztlich bleiben noch die Randbedingungen zu beschreiben.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial U}{\partial t} &= \frac{1}{2}\sigma_r^2 r^{2c} \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + (a(b-r) - \lambda\sigma_r r^c) \frac{\partial U}{\partial r} - rU + P \quad \text{für } S \rightarrow 0, \\
 \frac{\partial U}{\partial t} &= \frac{1}{2}\sigma_S^2 S^2 \frac{\partial^2 U}{\partial S^2} + ab \frac{\partial U}{\partial r} + P \quad \text{für } r \rightarrow 0, \\
 \frac{\partial U}{\partial t} &= \frac{1}{2}\sigma_S^2 S^2 \frac{\partial^2 U}{\partial S^2} + rS \frac{\partial U}{\partial S} - rU + P \quad \text{für } r \rightarrow \infty, S_1 \neq S_2, \\
 U(S, r, t) &= C_P \quad \text{für } S \rightarrow \infty.
 \end{aligned} \tag{28}$$

Zusätzlich wird auf Anleihen oft ein *Coupon* gezahlt, ein Zins auf den Nennwert der Anleihe. Diese Zahlung erfolgt meist jährlich oder halbjährlich. Natürlich erhöht ein solcher Coupon den Wert der Anleihe. Eine Coupon-Zahlung kann durch

$$U(S, r, t^+) = U(S, r, t^-) + C$$

in das Modell integriert werden. Dabei ist C der absolute Betrag, der pro Periode gezahlt wird. t^+ und t^- bezeichnen den Zeitpunkt kurz vor und kurz nach der Zahlung. Siehe dazu auch Zvan et. al. [26, 709f].

Ziel ist es nun, eine geeignete Diskretisierung der partiellen Differentialgleichung (3) unter Berücksichtigung der jeweiligen Parameter und Randbedingungen zu finden. Dafür wird die *finite Volumen* Methode angewendet, die im folgenden Kapitel eingeführt wird.

3 Finite Volumen

Den in Kapitel 2.3 vorgestellten zweidimensionalen Derivaten und den daraus resultierenden partiellen Differentialgleichungen gemäß (3) liegen zweidimensionale Definitionsgebiete zugrunde. Das legt die Behandlung von (3) mittels finiter Volumen nahe. Die Technik der finiten Volumen basiert im Grunde auf Bilanzgleichungen über gewisse Volumina. Ziel ist es, diese zu Bilanzgleichungen über die Ränder dieser Volumina zu transformieren. Der Sinn besteht darin, dass durch die Flüsse über den Rändern benachbarte Volumina in Verbindung stehen. Vielmehr noch heben sich bestimmte Flüsse gegenseitig auf. Diese Eigenschaft nennt man *Konservativität*. Eben diese Konservativität macht die Stärke einer finiten Volumen Diskretisierung aus, denn dadurch ist die Diskretisierung von Erhaltungssätzen wie beispielsweise Konvektions-Diffusions-Gleichungen, zu denen auch die zu behandelnde Optionsgleichung zählt, möglich (siehe dazu beispielsweise Großmann/Roos [9, 95] und Bey [1, 168]). In diesem Kapitel wird die Methode der finiten Volumen kurz vorgestellt und einige wichtige Begriffe und Bezeichnungen eingeführt.

3.1 Zerlegung des Grundgebietes

Zunächst soll die Konstruktion dieser Volumina betrachtet werden. Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ das Gebiet, auf dem die zu diskretisierende Funktion definiert ist. Zur Vereinfachung und durch den Definitionsbereich der behandelten Optionen ist es ausreichend, sich auf den Fall $n = 2$ zu beschränken. Ω wird nun in die Teilgebiete $\Omega_i, i = 1, \dots, N$ aufgeteilt. Diese Teilgebiete heißen *Kontrollvolumen* und erfüllen folgende Bedingungen:

- Die Ω_i sind offen, einfach zusammenhängend und polygonal berandet, allerdings ohne „Schlitze“,
- $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$ ($i \neq j$),
- $\cup_{i=1}^N \bar{\Omega}_i = \bar{\Omega}$

(vgl. Knabner/Angermann [12, 296]). Die genaue Konstruktion der Kontrollvolumina kann nun sehr willkürlich aussehen, solange diese Bedingungen erfüllt sind. Übliche geometrische Formen sind Rechtecke, Dreiecke oder Voronoi-Boxen. Eine Unterscheidung bezüglich der Art und Weise der Konstruktion bilden die Klassen der

cell-centered und *cell-vertex* Kontrollvolumen. Diese beiden Konzepte unterscheiden sich dadurch, inwieweit die Knotenpunkte des Grundgebietes in Verbindung mit den Kontrollvolumen stehen. Im Falle eines *cell-centered* Volumens liegt der Punkt, dem das Kontrollgebiet zugeteilt ist, in dessen Innerem. Bei der *cell-vertex* Methode bilden die Knotenpunkte die Ecken des Kontrollvolumens. Abbildung 4 veranschaulicht beide Konzepte anhand eines quadratischen Kontrollvolumens.

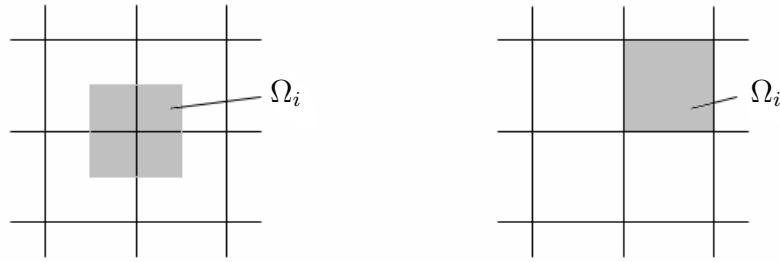


Abbildung 4: *Cell-centered* und *cell-vertex* Finite Volumen

Sofern nicht anders angegeben, bezieht sich die Diskretisierung im Folgenden immer auf quadratische äquidistante *cell-centered* Kontrollvolumina mit Abstand h der einzelnen Gitterpunkte. Dabei bezeichnet Ω_{ij} das Kontrollvolumen, das um den Punkt $x_{ij} := (ih, jh)$ aufgespannt wird und damit gilt:

$$\Omega_{ij} := \left\{ x \in \Omega : |x_{ij} - x| < \frac{h}{2} \right\}.$$

Weiterhin steht $\Gamma_{ij} := \partial\Omega_{ij}$ für den Rand des Kontrollvolumens und mit $\partial\Omega_{ij}^l$, $\partial\Omega_{ij}^r$, $\partial\Omega_{ij}^u$ und $\partial\Omega_{ij}^d$ werden die vier Teilstücke des Randes gemäß Abbildung 5 bezeichnet (*l*...left, *r*...right, *u*...up, *d*...down).

3.2 Diskretisierung

Nach der Wahl des geeigneten Gitters besteht der nächste Schritt in der Diskretisierung der zu lösenden Differentialgleichung

$$Lu = f$$

mit L als Differentialoperator. Zu finden ist nun eine geeignete Approximation u_h , die

$$L_h u_h = f_h$$

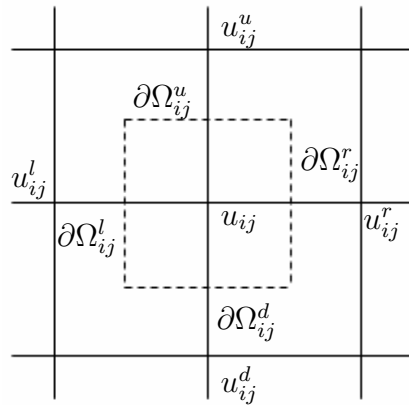


Abbildung 5: Bezeichnung der Randstücke des Kontrollvolumens und der Nachbarpunkte von u_{ij}

erfüllt. L_h bezeichnet den Differenzenoperator. Im finite Volumen Ansatz wird dazu die partielle Differentialgleichung über jedes einzelne der Kontrollvolumen integriert. Zur Verdeutlichung soll als Beispiel folgende PDG behandelt werden:

$$\begin{aligned} Lu &:= -\epsilon\Delta u + \nabla u = f \quad \text{in } \Omega = (0,1)^2 \\ u &= 0 \quad \text{auf } \Gamma := \partial\Omega \end{aligned} \quad (29)$$

mit $\epsilon \in \mathbb{R}$. Nach Integration der Modellgleichung über die Ω_{ij} ergibt sich nun:

$$-\int_{\Omega_{ij}} \epsilon\Delta u \, d\Omega_{ij} + \int_{\Omega_{ij}} \nabla u \, d\Omega_{ij} = \int_{\Omega_{ij}} f \, d\Omega_{ij}. \quad (30)$$

Durch Anwendung des Gaußschen Integralsatzes folgt schließlich:

$$-\epsilon \int_{\partial\Omega_{ij}} \nabla u \cdot \vec{n} \, d\Gamma_{ij} + \int_{\partial\Omega_{ij}} u \cdot \vec{n} \, d\Gamma_{ij} = \int_{\Omega_{ij}} f \, d\Omega_{ij}, \quad (31)$$

wobei \vec{n} die äußere Einheitsnormale auf den Rand Γ_{ij} bezeichnet. Da der Rand des Kontrollvolumens aus 4 Geraden besteht, ist \vec{n} entlang dieser Teilstücke konstant und die Integrale der linken Seite von (31) können in entsprechende Summen zerlegt werden. Es ergibt sich:

$$-\epsilon \sum_{k=l,r,u,d} \int_{\partial\Omega_{ij}^k} \nabla u \cdot \vec{n}_k \, d\Gamma_{ij}^k + \sum_{k=l,r,u,d} \int_{\partial\Omega_{ij}^k} u \cdot \vec{n}_k \, d\Gamma_{ij}^k = \int_{\Omega_{ij}} f \, d\Omega_{ij}. \quad (32)$$

Abschließend soll noch kurz auf die Lösung der Integrale der linken Seite von (32) eingegangen werden. Zunächst wird der *Diffusionsterm*, also $-\epsilon\Delta u$ betrachtet. Es ist letztlich eine geeignete Diskretisierung für ∇u zu finden und das Integral ent-

sprechend numerisch zu lösen. Im einfachsten Fall diskretisiert man die partiellen Ableitungen erster Ordnung mit zentralen Differenzen. Im Fall $k = l$ ergibt sich

$$\nabla u \cdot \vec{n}_l = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u}{\partial x_2} \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \approx -\frac{u_{ij} - u_{i-1,j}}{h}.$$

Die Fälle $k = r, u, d$ ergeben sich entsprechend. Approximiert man das Integral mittels der Mittelpunkregel, so lässt sich leicht nachrechnen, dass

$$-\epsilon \Delta u \approx \epsilon (4u_{ij} - u_{i-1,j} - u_{i+1,j} - u_{i,j-1} - u_{i,j+1}). \quad (33)$$

Für die approximierte Lösung des Konvektionsterms, also ∇u in (29), wird zunächst eine andere Schreibweise für das entsprechende Integral aus (32) gewählt. Es ist:

$$\int_{\Omega_{ij}^k} u \cdot \vec{n}_k \, d\Gamma_{ij}^k = \int_{\Omega_{ij}^k} \vec{n}_k \, d\Gamma_{ij}^k \tilde{u}_{ij}^k. \quad (34)$$

Die Darstellung von \tilde{u}_{ij}^k ist entscheidend für die Stabilität und Konvergenz des Verfahrens, wie im nächsten Kapitel gezeigt wird. Zunächst wird \tilde{u}_{ij}^k via central weighting dargestellt. Das heißt:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{ij}^l &= \frac{u_{ij} + u_{i-1,j}}{2} & \text{und} & & \tilde{u}_{ij}^r &= \frac{u_{ij} + u_{i+1,j}}{2} \\ \tilde{u}_{ij}^d &= \frac{u_{ij} + u_{i,j-1}}{2} & \text{und} & & \tilde{u}_{ij}^u &= \frac{u_{ij} + u_{i,j+1}}{2}. \end{aligned} \quad (35)$$

Somit ergibt sich

$$\nabla u \approx \frac{1}{2} h (u_{i+1,j} - u_{i-1,j} + u_{i,j+1} - u_{i,j-1}). \quad (36)$$

4 Konvektionsdominanz

Das in dieser Arbeit behandelte Problem (3) gehört zu einer speziellen Klasse von Problemen, den so genannten *singulär gestörten* Problemen, welche die Form

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) - \epsilon \Delta u + v \nabla u + cu = f$$

aufweisen. Diese Art von Problemen zeichnet sich durch eine Instabilität der diskreten Lösung für den Fall aus, in dem der Diffusionsterm (also $\epsilon \Delta u$) gegen Null geht. Das Problem wird konvektionsdominant. Allerdings ist gerade der Diffusionsterm das stabilisierende Element in der Gleichung. Verliert dieser Term an Einfluss, hat dies im Allgemeinen eine Instabilität des Verfahrens zur Folge (siehe dazu Bey [1, 236-241] und Großmann/Roos [9, 367]). Ziel ist es daher, das Problem auch im konvektionsdominanten Fall stabil zu bekommen.

Bevor auf die Konvergenz und Stabilität eingegangen wird, sollen noch einige Definitionen vorgenommen werden. Für die Konvergenzuntersuchungen wird die *diskrete Maximumnorm* (auch L_∞ -Norm)

$$\|u_h\|_{\infty,h} := \max_{x_i \in \Omega} |u_h(x_i)|,$$

und die *diskrete L_2 -Norm*

$$\|u_h\|_{2,h} := \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (u_h(x_i))^2}$$

verwendet, wobei u_h die numerische Approximation der exakten Lösung u und N die Anzahl der Diskretisierungspunkte bezeichnet.

Ein Verfahren heißt *konvergent* in der L_∞ -Norm wenn gilt:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\|_{\infty,h} = 0.$$

Konvergenz mit Ordnung p liegt vor, wenn gilt:

$$\|u - u_h\|_{\infty,h} \leq Ch^p,$$

mit einem von h unabhängigen C . Außerdem ist ein Verfahren gleichmäßig in ϵ stabil, wenn

$$\|u_h\|_{\infty,h} \leq C \|f_h\|_{\infty,h}$$

gilt, wobei C eine von ϵ unabhängige Konstante ist. Entsprechendes gilt für die L_2 -Norm.

4.1 Upwind-Diskretisierung

4.1.1 Der eindimensionale Fall

Zur Verdeutlichung des Problems und dessen Lösung soll zunächst der eindimensionale Fall betrachtet werden. Gegeben sei folgende Randwertaufgabe: Finde eine Funktion u mit

$$-\epsilon u'' + vu' = 1 \quad \text{in } \Omega = (0, 1) \quad (37)$$

und den Randbedingungen

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 0. \quad (38)$$

Für den Test soll außerdem $\epsilon = 0.01$ und $v = 1$ gelten. Dann lautet die analytische Lösung

$$u(x) = x - \frac{\exp((x-1)/\epsilon) - \exp(-1/\epsilon)}{1 - \exp(-1/\epsilon)}. \quad (39)$$

Der Definitionsbereich wird durch ein äquidistantes Gitter der Länge h diskretisiert. Mittels zentralem Differenzenquotienten ergibt sich für die diskrete Lösung von (37):

$$-\epsilon \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} + \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} = 0 \quad (40)$$

(vgl. Morton[17, 144f.], Hanke-Bourgeois [10, 640f.]).

Abbildung 6 zeigt die approximativen Lösungen im Vergleich zur exakten Lösung für zwei unterschiedliche Schrittweiten $h = 0.05$ und $h = 0.01$. Im Fall der größeren Schrittweite oszilliert die approximierte Lösung verhältnismäßig stark. Zur Erklärung dieses Verhaltens sei noch die Péclet-Zahl $Pe = \frac{v|h|}{\epsilon}$ definiert. Das beschriebene Verfahren ist nur stabil für $Pe \leq 2$. Das ist eine Folgerung aus dem M-Kriterium, da nur mit einer Péclet-Zahl kleiner 2 die Einträge außerhalb der Hauptdiagonalen in der Koeffizientenmatrix nicht positiv sind (siehe dazu insbesondere Großmann/Roos [9, 375]). Abbildung 6 zeigt dieses Verhalten deutlich. Während im linken Graph $Pe = 5$ beträgt, gilt für die rechte Abbildung $Pe = 1$. Die Lösung des Problems liegt nun in der Modifikation der Außendiagonalelemente in der Koeffizientenmatrix, und zwar so, dass sie das M-Kriterium erfüllen. Eine Möglichkeit ist die Schrittweite h zu verkleinern bis die Péclet-Bedingung erfüllt ist. Diese Strategie ist aber vor allem für höher dimensionierte Probleme nicht zu empfehlen, da der Bedarf an Speicherkapazität sehr schnell wächst. Eine andere Möglichkeit sind *upwind*-Strategien. Statt des zentralen Differenzenquotienten nutzt man in der Diskretisierung einen einseitigen Differenzenquotienten. In Abhängigkeit von v , dessen

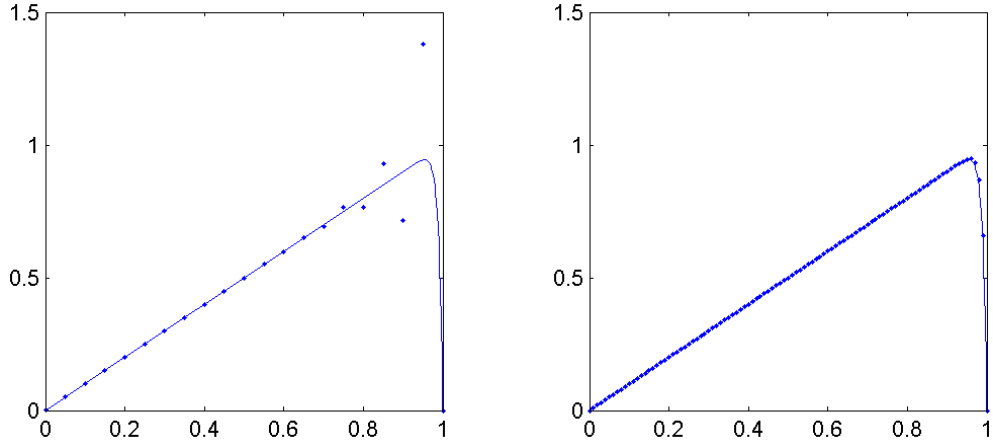


Abbildung 6: Problem (37) diskretisiert mit zentralen Differenzen

Vorzeichen die Richtung des numerischen Informationsflusses steuert, diskretisiert man den Konvektionsterm nun durch

$$u' = \begin{cases} \frac{u_{i+1} - u_i}{h} & \text{für } v < 0 \\ \frac{u_i - u_{i-1}}{h} & \text{für } v > 0. \end{cases}$$

Für das vorliegende Modellproblem (37) mit bekannten Parametern ergibt sich also:

$$-\epsilon \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} + \frac{u_i - u_{i-1}}{h} = 0. \quad (41)$$

Die Stabilität lässt sich mittels des M-Kriteriums einfach zeigen. Auf den Beweis soll hier verzichtet werden, dieser findet sich beispielsweise in Großmann/Roos [9, 376].

Abbildung 7 zeigt die analytischen und diskreten Lösungen von (37) im upwind-Schema. Es ist deutlich zu erkennen, dass keine Oszillationen vorliegen. Dennoch approximiert das upwind-Verfahren die analytische Lösung relativ schlecht.

h	central weighting		upwind	
	$\ u_h - u\ _{\infty, h}$	$\ u_h - u\ _{2, h}$	$\ u_h - u\ _{\infty, h}$	$\ u_h - u\ _{2, h}$
$\frac{1}{10}$	0.0345	0.0134	0.1317	0.0591
$\frac{1}{20}$	0.0079	0.0033	0.0764	0.0339
$\frac{1}{40}$	0.0019	0.00082	0.0417	0.0182
$\frac{1}{80}$	0.00047	0.0002	0.0218	0.0095

Tabelle 1: Vergleich der Fehlerentwicklung der central weighting- und upwind-Diskretisierung für Problem (37)

Ein großer Nachteil des upwind-Verfahrens liegt in der schlechten Konvergenz im Vergleich zu einem central weighting. Noch einmal eingehend auf Beispiel (37)

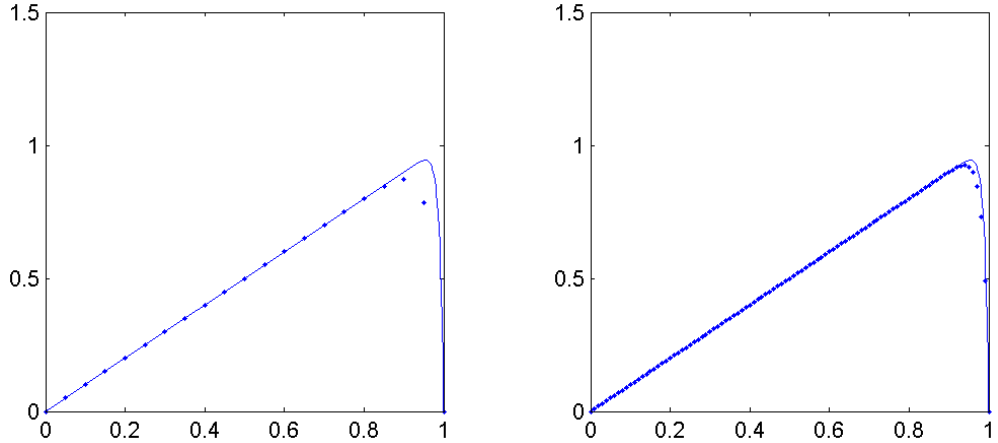


Abbildung 7: Problem (37) diskretisiert mit dem upwind-Verfahren

sind in Tabelle 1 die Fehlerentwicklungen in der L_∞ - und der L_2 -Norm für das upwind- und das central weighting-Verfahren abgebildet. Es wird deutlich, dass das upwind-Verfahren einen größeren Fehler in beiden Normen aufweist. Außerdem konvergiert das upwind-Schema mit Ordnung 1, während central weighting von zweiter Ordnung ist.

4.1.2 Der zweidimensionale Fall

Zur Betrachtung des upwind-Schemas im zweidimensionalen Fall sieht das Modellproblem wie folgt aus: Finde eine Funktion u mit

$$\begin{aligned} -\epsilon \Delta u + v \nabla u &= 0 \quad \text{in } \Omega = (0, 1) \times (0, 1) \\ u &= g \quad \text{auf } \Gamma := \partial\Omega, \end{aligned} \quad (42)$$

wobei jetzt $v = (v_1, v_2)$ gilt.

Die Diskretisierung von (42) mittels finiten Volumen auf einem quadratischen Gitter und central weighting für den Konvektionsterm liefert:

$$\begin{aligned} -\epsilon \left(\frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,j-1}}{h^2} \right) \\ + v_1 \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} + v_2 \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2h} = 0. \end{aligned}$$

Bemüht man nun wieder das M-Kriterium für die Koeffizientenmatrix zum Setzen der Stabilitätsbedingung, so wird klar, dass für die inneren Punkte $Pe = \frac{\max|v| \cdot h}{\epsilon} \leq 2$ gelten muss, um Nichtpositivität für die Außendiagonaleinträge zu sichern. Es treten also entweder die bekannten Probleme im konvektionsdominierten Fall auf oder die Schrittweite h muss sehr klein gewählt werden.

Es soll deshalb wieder das upwind-Verfahren angewendet werden, wobei die Richtung des upwind-Flusses in den beiden Koordinaten von dem jeweiligen Vorzeichen der Einträge des Vektors v abhängt. Bezugnehmend auf die Gleichungen (35) ergibt sich für das upwind-Verfahren

$$\tilde{u}_{ij} = \begin{cases} u_{ij} & \text{falls } v \cdot \vec{n}_k > 0 \\ u_{ij}^k & \text{falls } v \cdot \vec{n}_k \leq 0, \end{cases} \quad (43)$$

mit $k = l, r, u, d$ (für die Bezeichnung der Punkte siehe Abbildung 5). \tilde{u}_{ij} heißt in diesem Fall upwind-Punkt $u_{ij,up}$. Ist $u_{ij,up} = u_{ij}$, so ist u_{ij}^k der downwind-Punkt $u_{ij,down}$ und umgekehrt. Upwind-Verfahren sorgen letztlich dafür, dass die numerische Information stets vom upwind-Punkt zum downwind-Punkt fließt. Für $v > (0, 0)$ ergibt sich somit:

$$\begin{aligned} -\epsilon \left(\frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,j-1}}{h^2} \right) \\ + v_1 \frac{u_{ij} - u_{i-1,j}}{h} + v_2 \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{h} = 0. \end{aligned}$$

Wieder lässt sich die gleichmäßige Stabilität mittels M-Kriterium einfach nachweisen. Allerdings ist die vorgestellte upwind-Strategie auch im zweidimensionalen Fall lediglich von erster Konvergenzordnung (siehe dazu z.B. Lazarov et. al. [14]). Dies soll folgendes Beispiel verdeutlichen: Gesucht ist eine Funktion u mit

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \epsilon \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{in } \Omega := (0, 1) \quad (44)$$

und den Randbedingungen

$$u(0, y) = \sin(\pi y), \quad u(1, y) = u(x, 0) = u(x, 1) = 0. \quad (45)$$

Dieses Problem besitzt die analytische Lösung

$$u(x, y) = \frac{\sin(\pi y)}{e^a - e^b} (e^{a+bx} - e^{b+ax}), \quad (46)$$

wobei

$$a = \frac{\epsilon}{2} + \left(\frac{\epsilon^2}{4} + \pi^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad b = \frac{\epsilon}{2} - \left(\frac{\epsilon^2}{4} + \pi^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (47)$$

Für den Test wurde $\epsilon = 2$ gesetzt. Tabelle 2 vergleicht central weighting und upwind-Verfahren bezüglich ihrer Fehler in der L_2 - und der L_∞ -Norm. Auch hier wird deutlich, dass das upwind-Verfahren wesentlich schlechter konvergiert (nämlich nur mit einfacher Ordnung) als das central weighting-Verfahren, welches quadratisch konvergiert. Dies soll zum Anlass genommen werden, im folgenden Abschnitt ein stabiles Verfahren höherer Konvergenzordnung zu finden.

h	central weighting		upwind	
	$\ u_h - u\ _{\infty,h}$	$\ u_h - u\ _{2,h}$	$\ u_h - u\ _{\infty,h}$	$\ u_h - u\ _{2,h}$
$\frac{1}{10}$	0.0033	0.0015	0.0082	0.0037
$\frac{1}{20}$	0.0008	0.0004	0.0049	0.0023
$\frac{1}{40}$	0.0002	0.0001	0.0026	0.0013
$\frac{1}{80}$	0.00005	0.00003	0.0014	0.0007

Tabelle 2: Vergleich der Fehlerentwicklung der central weighting- und upwind-Diskretisierung für Problem (44)

4.2 Flux-Limiter

Es existieren nun mehrere Möglichkeiten, das Problem der schlechten Konvergenz zu behandeln. Eine davon besteht in der Nutzung von flux-Limitern, um die starke numerische Diffusion des upwind-Schemas zu verhindern (Zvan et. al. [26, 714 f.]). Es sollen in diesem Abschnitt der van Albada und der van Leer Limiter vorgestellt und verglichen werden. Dabei wird sich auf den zweidimensionalen Fall beschränkt. Es wird also wieder das Modelproblem (42) betrachtet. Der prinzipielle Aufbau ist für beide Limiter gleich und in Anlehnung an die Gleichungen (35) ergibt sich:

$$\tilde{u}_{ij}^k = u_{ij,up}^k + \frac{1}{2}\Psi(R_{ij}^k)(u_{ij,down}^k - u_{ij,up}^k), \quad k = l, r, u, d. \quad (48)$$

Dabei ist:

$$R_{ij}^k = \frac{u_{ij,up}^k - u_{ij,2up}^k}{u_{ij,down}^k - u_{ij,up}^k} \quad (49)$$

(vgl. dazu Spekrijse [20, 136f.] sowie Zvan et. al. [26, 714f.]). $u_{ij,2up}$ ist ein zweiter upwind-Punkt und ergibt sich in einem rechteckigem Gitter aus dem Nachbarpunkt, der gegenüber von $u_{ij,down}$ liegt. Die Funktion $\Psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist der Limiter. Für den van Leer Limiter gilt:

$$\Psi_{vL}(R) = \frac{R + |R|}{1 + |R|}.$$

Der van Albada Limiter wird sehr ähnlich konstruiert. Es ist:

$$\Psi_{vA}(R) = \frac{R + R^2}{1 + R^2}.$$

Für die Limiterfunktionen lässt sich leicht zeigen, dass $0 \leq \Psi_{vL}(R) \leq 2$ bzw. $0 \leq \Psi_{vA}(R) < 1$, 21 sowie $0 \leq \frac{\Psi_{vL}(R)}{R} \leq 2$ bzw. $0 \leq \frac{\Psi_{vA}(R)}{R} \leq 1.5$ gilt. Spekrijse [20, 140f.] zeigt, dass unter diesen Voraussetzungen das Schema monoton ist. Des Weiteren ist klar, dass sich im Fall $\Psi = 1$ das zentrale Differenzschema ergibt.

Um genauer auf die Konvergenz der Limiter eingehen zu können, muss zunächst der Begriff TVD-Schema erläutert werden. Unter einer totalen Variation TV im zweidimensionalen Fall versteht man:

$$TV(u_h) = \sum_{i,j} (h |u_{i+1,j} - u_{ij}| + h |u_{i,j+1} - u_{ij}|), \quad (50)$$

wobei ein äquidistantes Gitter in Richtung beider Koordinaten angenommen wurde. Durch Einführung der totalen Variation ist es möglich, Schwankungen bzw. Oszillationen in der Lösung zu messen (siehe LeVeque [15, 109]). Ein TVD-Schema (total variation diminishing, oder Minderung der totalen Variation) bezeichnet ein Verfahren, bei dem die totale Variation im Verlauf der Zeit nicht ansteigt. Wird u_h zu verschiedenen Zeitpunkten n und $n + 1$ ausgewertet, dann ist das Verfahren TVD, wenn gilt:

$$TV(u_h^{n+1}) \leq TV(u_h^n). \quad (51)$$

Gleichung (48) ist eine Konvexkombination eines zwei-Punkt-upwind Schemas und central weighting. Da beides Konvergenzordnung 2 besitzt, müssten die Limiter-Schemata außer an lokalen Extremstellen ebenfalls von zweiter Ordnung sein (vgl. Zvan et. al. [26, 715]). Goodman und LeVeque [5, 18] haben jedoch gezeigt, dass so genannte TVD-Schemata im zweidimensionalen Fall in der Regel nur Konvergenzordnung 1 haben. Abhilfe schafft hierfür ein modifiziertes Limiter-Schema, genauer eines mit ausschließlich positiven Koeffizienten (Spekreijse [20, 140f.]). Unter bestimmten Bedingungen (siehe dazu Anhang) erreicht man mit dem Schema

$$\tilde{u}_{ij}^k = \begin{cases} \frac{u_{ij}^k + u_{ij}}{2} & \text{falls } v \cdot \vec{n}_k \leq 0 \\ u_{ij,up}^k + \frac{1}{2} \Psi(R_{ij}^k) (u_{ij,down}^k - u_{ij,up}^k) & \text{falls } v \cdot \vec{n}_k > 0. \end{cases} \quad (52)$$

eine Diskretisierung mit positiven Koeffizienten und höherer als linearer Konvergenz.

5 Modifikation der Gitter

Für die Lösung vieler Probleme ist eine recht feine Diskretisierung des Grundgebietes nötig. Dabei kann der benötigte Speicherplatz schnell Überhand nehmen. Ziel ist es daher, den Speicheraufwand für das diskretisierte Problem zu reduzieren, gleichzeitig aber den daraus entstehenden Fehler so gering wie möglich zu halten. Im folgenden Kapitel werden dazu zwei Methoden vorgestellt. Gradierte Gitter erzeugen nur an kritischen Stellen eine feine Diskretisierung. Dünne Gitter wiederum verfolgen einen Ansatz mit hierarchischen Basen.

5.1 Gradierte Gitter

Das Verhalten der diskreten Lösung hängt direkt von der Schrittweite h des Diskretisierungsgitters ab. Wie bereits in Kapitel 4 angesprochen sind beispielsweise für zu große Péclet-Zahlen die approximierten Lösungen instabil. Die Lösung des Problems liegt dann unter anderem in der Reduzierung der Schrittweite h , um das Stabilitätskriterium zu erfüllen. Diese Strategie kann jedoch sehr schnell die Grenzen des vorhandenen Speicherplatzes für die auszuwertenden Punkte ausreizen. Das ist insbesondere ein Problem für höherdimensionierte Fälle, wenn man bedenkt, dass bereits im zweidimensionalen Fall eine Halbierung der Schrittweite zu einer Vervierfachung an Diskretisierungspunkten führt. Dieses Problem kann in vielen Fällen dadurch umgangen werden, dass nur an bestimmten Stellen eine Verfeinerung von h vorgenommen wird. Betrachtet man das Beispiel (37) und die dazugehörige Abbildung 6, so wird deutlich, dass das Problem im Bereich $x = [0, 0.7]$ trotz einer recht groben Schrittweite gut approximiert wird. Die Verfeinerung der Schrittweite sollte sich auf den Bereich $x = [0.7, 1]$ beschränken.

In einigen Fällen sind solche kritischen Bereiche bereits vorher bekannt und die lokale Verfeinerung kann gezielt in das Programm eingebaut werden. Das ist oft bei Optionspreisbewertungen der Fall, da die Anfangsbedingungen zwar stückweise glatt sind, der Optionswert aber einen Knick im Bereich des Ausübungskurses E aufweist. Dies zeigen die Abbildungen 1 bis 3 deutlich. Es macht dann Sinn, nur in den Bereichen dieser Knicke lokal zu verfeinern. Dazu bieten sich Gradierungsfunktionen an. Ausgehend von einem äquidistanten Gitter mit der Schrittweite h auf dem Gebiet $\Omega = [0, 1]$ bildet die Gradierungsfunktion $H : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ je-

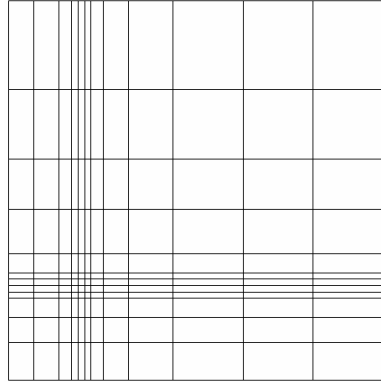


Abbildung 8: Zweidimensionales gradiertes Gitter

den Diskretisierungspunkt $x_i = ih$ auf einem neuen Gitter ab. Dabei ist H streng monoton. Als Diskretisierungsfunktion bietet sich

$$H_\eta(x) := K + \frac{1}{\eta} \tan((\arctan \eta(1 - K) + \arctan K\eta)x - \arctan K\eta) \quad (53)$$

an. $K \in [0, 1]$ ist der Punkt, um den das Gitter feiner werden soll. Über den Parameter η wird die Feinheit des Gitters um K bestimmt (siehe dazu Reisinger [18, 28]). Der Vorteil dieser Methode besteht darin, dass die Anzahl der Diskretisierungspunkte sich nicht erhöht, H ist bijektiv. Der Bedarf an Speicherplatz ist identisch zu dem des Ausgangsgitters. Und da die Gradierungsfunktion nur in einer Dimension wirkt, ist es sogar möglich, auf einem zweidimensionalen Grundgebiet in beide Koordinatenrichtungen unterschiedlich zu gradieren.

Es ist klar, dass durch die variierenden Gitterabstände zwischen den Diskretisierungspunkten der Punkt x_{ij} im Allgemeinen nicht mehr den Mittelpunkt des Kontrollvolumens bildet und Ω_{ij} auch kein Quadrat ist, sondern ein Rechteck darstellt. Abbildung 8 zeigt ein solches zweidimensionales gradiertes Gitter.

Eine Diskretisierung mit gradierten Gittern bietet sich allerdings nur an, wenn die Fehlerentwicklung in einem einzelnen Punkt oder einer recht kleinen Umgebung eines Punktes von Interesse ist. Dann ist es möglich, den Fehler gezielt lokal zu verringern. Betrachtet man allerdings den Fehler auf dem gesamten Grundgebiet, so bringen gradierte Gitter eher Nachteile. Während um einen Punkt ein recht feines Gitter konstruiert wurde, sind über Gebiete, die relativ weit weg von diesem Punkt liegen, sehr grobe Gitter gespannt. Die Anzahl der Diskretisierungspunkte bleibt schließlich erhalten. Das hat zur Folge, dass in solchen Gebieten die Approximation sehr schlecht ist und der Gesamtfehler, beispielsweise gemessen als Fehler in der L_2 -

Norm, unter Umständen sogar größer ausfallen kann, als auf einem äquidistanten Gitter.

5.2 Die Kombinationsmethode

5.2.1 Hierarchische Basen

Das Prinzip der dünnen Gitter oder *sparse grids* besteht in der Reduzierung der auszuwertenden Knoten. Angenommen, eine partielle Differentialgleichung sei auf dem Einheitsquadrat $\bar{\Omega} = [0, 1]^2$ definiert und soll diskretisiert werden. Nutzt man dafür standardmäßig ein volles Gitter, so ist die diskrete Lösung in Abhängigkeit vom Gitterabstand h an $O(h^{-2})$ Punkten auszuwerten. Mittels dünner Gitter, die durch Zenger [24] eingeführt wurden, lässt sich die Anzahl der auszuwertenden Punkte auf $O(h^{-1} \log h^{-1})$ reduzieren. Dabei bilden die Punkte des dünnen Gitters eine Teilmenge der dazugehörigen Vollgitterpunkte. Bevor auf die Fehlerentwicklung eingegangen wird, sollen zunächst die dünnen Gitter beschrieben werden.

Der Einfachheit halber sollen nur die inneren Punkte des Grundgebietes untersucht werden. Betrachtet wird ein volles Gitter der Maschenweite $h_{k_i} = 2^{-k_i}$ in Richtung der x-Koordinate sowie $h_{k_j} = 2^{-k_j}$ in y-Richtung. Es handelt sich um eine Zerlegung in Rechtecke mit äquidistanter Maschenweite in eine Richtung, jedoch darf $k_i \neq k_j$ gelten. Beim herkömmlichen Diskretisierungsansatz nutzt man nodale Basisfunktionen φ_{ij} zum Aufbau des diskreten Funktionenraumes. Es ist:

$$\varphi_i^k(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{h_k} & \text{für } x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \frac{x_{i+1}-x}{h_k} & \text{für } x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (54)$$

für den eindimensionalen Fall. Dann ist $\varphi_{ij}^k = \varphi_i^{k_i} \cdot \varphi_j^{k_j}$. Die nodale Basis des Raumes B_k^n geht also aus einem Tensorprodukt der Basen der eindimensionalen Räume hervor:

$$B_{k_i, k_j}^n = B_{k_i}^n \otimes B_{k_j}^n.$$

B_{k_i, k_j}^n bildet somit den Raum stückweise bilinearer Funktionen und besitzt $(2^{k_i} - 1) \cdot (2^{k_j} - 1)$ innere Basispunkte (vgl. Garcke [4, 17f.]).

Eine andere Möglichkeit, den diskreten Funktionenraum aufzubauen, liegt in hierarchischen Basisfunktionen. Diese sind ähnlich konstruiert wie nodale Basisfunktionen, allerdings mit dem Unterschied, dass die Funktionen nicht von gleicher Größe

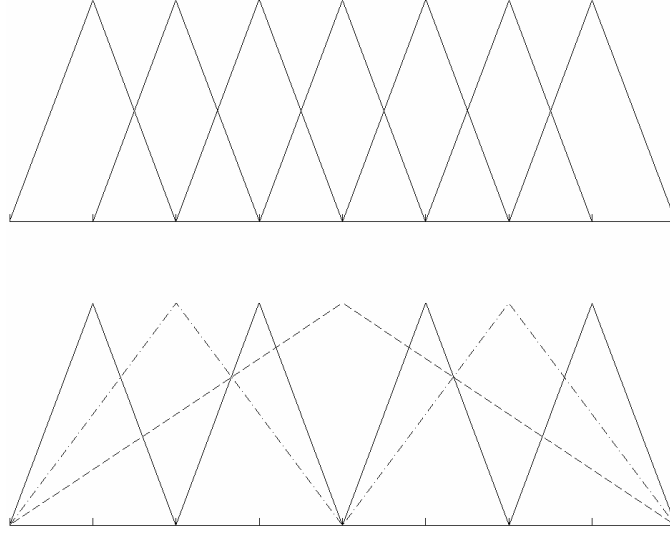


Abbildung 9: Nodale und hierarchische Basisfunktionen vom Level 3

sind. Die Maschenweite hängt dabei sowohl von der Richtung der Koordinaten als auch vom Basispunkt selbst ab (siehe dazu Abbildung 9). Die eindimensionale hierarchische Basis vom Level k wird definiert als

$$B_k^h := \{\varphi_i^l \mid l \leq k, i \bmod 2 = 1\}. \quad (55)$$

Die zweidimensionale hierarchische Basis ist ebenfalls ein Tensorprodukt der eindimensionalen Basen:

$$B_{k_i, k_j}^h = B_{k_i}^h \otimes B_{k_j}^h.$$

Abschließend sollen noch die Teilmengen T_k eingeführt werden. T_k beinhaltet alle hierarchischen Basisfunktionen aus B_k^h , die in B_{k-1}^h verschwinden. Dazu sei Abbildung 9 noch einmal genauer betrachtet. Das untere Bild zeigt die hierarchischen Basisfunktionen vom Level 3. Dabei bildet die Funktion mit gestrichelter Linie die Teilmenge T_1 , diejenigen mit strich-punktierter Linien T_2 und die restlichen Funktionen (durchgezogene Linien) den Teilraum T_3 . Der Aufbau des dünnen Gitters vom Level k erfolgt dadurch, dass ein Teil der Basisfunktionen aus T_k nicht in den Aufbau einbezogen werden. Für T_k gilt also:

$$T_k := \{\varphi_i^l \mid l = k, i \bmod 2 = 1\}.$$

Damit ist

$$B_{k_i, k_j}^h = \sum_{i=1}^{k_i} \sum_{j=1}^{k_j} T_{i,j}, \quad (56)$$

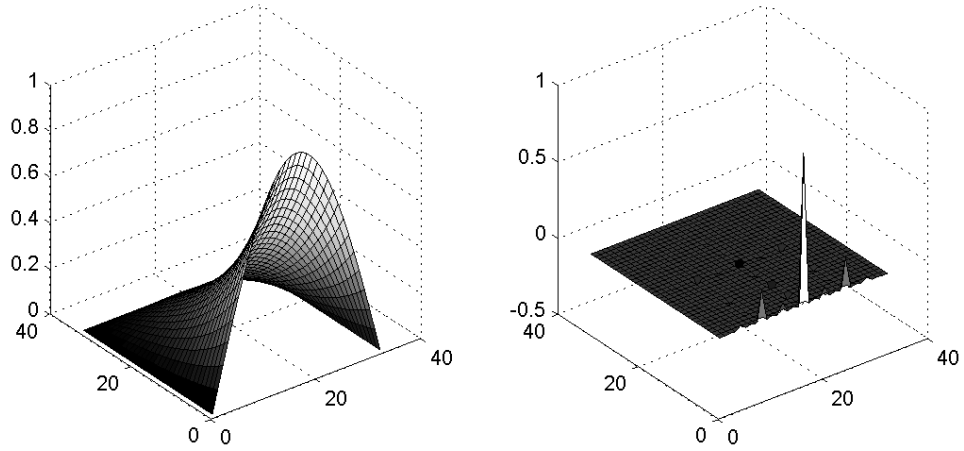


Abbildung 10: Funktion (44) und ihre Darstellung in hierarchischen Basen mit Level 5

mit $T_{i,j} = T_i \otimes T_j$. Als Beispiel für eine Darstellung in hierarchischen Basen dient Abbildung 10. Diese zeigt die Funktion aus dem Beispielproblem (44) mit ihrer entsprechenden hierarchischen Basisdarstellung vom Level 5.

Definiert man nun noch die Halbnorm $|u|$ mit

$$|u| = \left\| \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} \right\|_{\infty} \quad (57)$$

und befindet sich u im Raum in dem $\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2 \partial x_2^2}$ existiert und stetig ist, dann ergibt sich für den Interpolanten u^I einer Funktion $u \in B_{k_i, k_j}^h$

$$u^I = \sum_{i=1}^{k_i} \sum_{j=1}^{k_j} u_{ij} \text{ mit } u_{ij} \in T_{i,j}, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (58)$$

Griebel, Schneider und Zenger [7, 2] haben einen Algorithmus angegeben, um eine Funktion, dargestellt in nodalen Basen, in ihre hierarchische Basis zu transformieren. Im Folgenden ist dieser Algorithmus für den zweidimensionalen Fall angegeben:

```

for ly = 1:j
  hy = 2ly-1;
  for x = 0:M
    y = hy:2*hy:N-hy
    u[x,y] = u[x,y] - (u[x,y-hy] + u[x,y+hy])/2;
  end
end
end
for ly = 1:i
  hx = 2lx-1;
  for y = 0:N
    x = hx:2*hx:M-hx
    u[x,y] = u[x,y] - (u[x-hx,y] + u[x+hx,y])/2;
  end
end
end
end

```

Durch die Reduzierung der Stützstellen kommt es letztlich aber zu einer verschlechterten Fehlerentwicklung. Zenger [24, 247] zeigt, dass sich im Vergleich zu vollen Gittern die Güte der Approximation von $O(h^2)$ auf $O(h^2 \log h^{-1})$ verschlechtert. In Anbetracht der erheblichen Einsparung an Speicherplatz ist diese Entwicklung des Fehlers allerdings vertretbar (vgl. Garcke [4, 16-20], Hilgenfeldt [11, 17-23] und insbesondere Zenger [24, 243-247]). Abbildung 11 zeigt die deutliche Verringerung der auszuwertenden Punkte eines dünnen Gitters im Vergleich zu einem vollen Gitter.

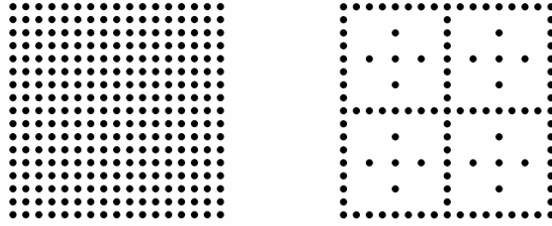


Abbildung 11: Volles und dünnes Gitter vom Level 4

Ein Nachteil dünner Gitter liegt darin, dass in der Diskretisierung durch die Hierarchisierung recht komplizierte Strukturen entstehen. Das macht es schwierig, bekannte Methoden und Verfahren auf dünne Gitter zu übertragen.

5.2.2 Die Kombinationstechnik

Die Kombinationstechnik stellt eine Methode dar, partielle Differentialgleichungen auf dünnen Gittern zu lösen. Das Prinzip der Kombinationsmethode liegt in der Lösung der Gleichung auf mehreren vollen Gittern mit verschiedenen Maschenweiten und schließlich der linearen Kombination dieser Lösungen.

Zunächst sind einige Definitionen zu formulieren. Es sollen wieder die inneren Punkte des Grundgebietes $\bar{\Omega} = [0, 1]^2$ betrachtet werden. $\Omega^{i,j}$ bezeichnet ein Gitter der Maschenweite 2^{-i} in Richtung der x -Koordinate und 2^{-j} in y -Richtung. Es soll nun ein kombiniertes Gitter vom Level 4 konstruiert werden. Dies geschieht durch eine Kombination der Gitter $\Omega^{1,4}$, $\Omega^{2,3}$, $\Omega^{3,2}$ und $\Omega^{4,1}$, also $\bigcup_{i+j=5} \Omega^{i,j}$. Durch dieses Vorgehen werden einige Punkte jedoch mehrfach in das Gitter mit einbezogen, so dass diese wieder entfernt werden müssen. Es werden $\Omega^{1,3}$, $\Omega^{2,2}$ und $\Omega^{3,1}$, oder $\bigcup_{i+j=4} \Omega^{i,j}$ subtrahiert. Bezeichnet $u^{i,j}$ die diskrete Lösung der PDG auf dem Gitter $\Omega^{i,j}$, so ergibt sich durch die Kombinationsmethode folgende Konstruktion:

$$u^{n,n} = \sum_{i+j=n+1} u^{i,j} - \sum_{i+j=n} u^{i,j}. \quad (59)$$

Somit müssen n Teilprobleme mit 2^n Unbekannten sowie $n - 1$ Teilprobleme mit 2^{n-1} Unbekannten gelöst werden. Zusammen ergibt dies für den zweidimensionalen Fall $O(h^{-1} \log(h^{-1}))$ Unbekannte, die zu bestimmen sind. Hinzu kommt die Transformation der Teilgitterlösungen in hierarchische Basisdarstellung mittels oben vorgestellten Algorithmus, die Kombination der Lösungen sowie die Retransformation in nodale Basisdarstellung. Die Anzahl der hierfür benötigten Rechenoperationen bewegt sich in der Größenordnung $O(h^{-1} \log(h^{-1}))$. Also ist der Gesamtaufwand der Kombinationstechnik von Ordnung $O(h^{-1} \log(h^{-1}))$ (vgl. Griebel und Thurner [8, 256]).

Besonders im Fall hoher Level führt die Kombinationstechnik bei den äußeren Teilproblemen (kleines i bzw. kleines j in (59)) zu stark anisotropen Gittern, d. h. die Maschenweiten in beide Koordinatenrichtungen unterscheiden sich sehr stark. Dies kann zu Problemen bei der Diskretisierung führen. Daher ist eine Begrenzung der Unterschiede der Maschenweiten beider Richtungen denkbar. Dazu sei ein $n^* < n$ definiert und die reduzierte Kombinationsformel lautet nun

$$u^{n,n} = \sum_{i+j=n^*+1} u^{i,j} - \sum_{i+j=n^*} u^{i,j} \quad (60)$$

(siehe auch Kreißl [13, 12]). Die mittels Kombinationstechnik gefundene Lösung $u^{n,n}$ ist allerdings nicht identisch mit der Lösung auf dünnen Gittern. Griebel et. al. [7, 4f.] haben jedoch gezeigt, dass bei hinreichend glatten Funktionen die Lösung der Kombinationsmethode $u^{n,n}$ die gleiche Fehlerordnung $O(h^2 \log(h^{-1}))$ wie die Dünngitterlösung aufweist.

Der Vorteil der Kombinationstechnik liegt darin, dass für die Lösung keine komplizierten Algorithmen entworfen werden müssen, sondern das Problem in mehrere kleinere Teilprobleme zerfällt, welche mit bekannten Verfahren gelöst und recht unkompliziert kombiniert werden können (zur Kombinationstechnik siehe auch Bungartz et. al. [3, 7f.], Griebel [6, 1f.], Kreißl [13, 8f.]).

Level	Kombinationstechnik		volles Gitter	
	$\ u_h - u\ _{\infty,h}$	$\ u_h - u\ _{2,h}$	$\ u_h - u\ _{\infty,h}$	$\ u_h - u\ _{2,h}$
3	0.0189	0.0074	0.0051	0.0023
4	0.0075	0.0028	0.0013	0.00063
5	0.0026	0.00097	0.00032	0.00016
6	0.00083	0.00031	0.00008	0.00004

Tabelle 3: Fehlerentwicklung für Problem (44) gelöst mit der Kombinationstechnik und auf einem vollen Gitter

Als Beispiel sei erneut Problem (44) betrachtet. Tabelle 3 zeigt die Fehlerentwicklung des diskretisierten Problems gelöst mit der Kombinationsmethode für unterschiedliche Level. Im Vergleich dazu wurde auch der Fehler auf dem vollen Gitter betrachtet. Es wird deutlich, dass das Verfahren auf einem vollen Gitter wesentlich schneller konvergiert. Dennoch ist zu beachten, dass bei der Kombinationstechnik die Anzahl der auszuwertenden Punkte stark reduziert wurde. Insbesondere bei feinen Maschenweiten ist der Fehler der Kombinationstechnik deshalb vertretbar. Problem (44) wurde für dieses Beispiel mit dem central weighting-Verfahren diskretisiert.

6 Diskretisierung der Derivate

In den vorangegangenen Kapiteln wurde die Diskretisierung mittels finiten Volumen sowie einige Modifikationen des Verfahrens eingeführt. Diese sollen jetzt auf die in Kapitel 2.3 vorgestellten Derivate angewendet werden. Der Unterschied zu den bisher betrachteten PDG liegt im Diffusionsterm. Während der Diffusionsfaktor ϵ bisher reellwertig war, handelt es sich im Folgenden um eine Diffusionsmatrix (siehe Gleichung (3)).

6.1 Innere Punkte

Das Grundgebiet Ω sei durch ein äquidistantes quadratisches Gitter diskretisiert. Die Abstände der einzelnen Punkte in Richtung beider Achsen sei h . Für die Kontrollvolumen werden wieder quadratische cell-centered Volumen gewählt und wie bisher mit Ω_{ij} bezeichnet.

Für Gleichung (3) ergibt sich nach der Integration über die Kontrollvolumina folgende Gleichung für die inneren Punkte:

$$\int_{\Omega_{ij}} \frac{\partial U}{\partial t} d\Omega_{ij} = - \int_{\Omega_{ij}} V \nabla U d\Omega_{ij} + \int_{\Omega_{ij}} (D \nabla) \nabla U d\Omega_{ij} - \int_{\Omega_{ij}} r U d\Omega_{ij} + \int_{\Omega_{ij}} P d\Omega_{ij}. \quad (61)$$

Durch Anwendung des Gaußschen Integralsatzes auf (61) ergibt sich für die einzelnen Summanden:

$$\int_{\Omega_{ij}} \frac{\partial U}{\partial t} d\Omega_{ij} \approx h^2 \left(\frac{U_{ij}^{n+1} - U_{ij}^n}{\Delta t} \right), \quad (62)$$

$$\int_{\Omega_{ij}} V \nabla U d\Omega_{ij} \approx V_{ij} \int_{\partial\Omega_{ij}} U \vec{n} d\Gamma_{ij}, \quad (63)$$

$$\int_{\Omega_{ij}} (D \nabla) \nabla U d\Omega_{ij} \approx \int_{\partial\Omega_{ij}} (D_{ij} \nabla U) \vec{n} d\Gamma_{ij}, \quad (64)$$

$$\int_{\Omega_{ij}} r U d\Omega_{ij} \approx h^2 r U, \quad (65)$$

$$\int_{\Omega_{ij}} P d\Omega_{ij} \approx p. \quad (66)$$

p bezeichnet die diskrete Form des Penaltyterms, der für die Coupon-Zahlung der Wandelanleihen benötigt wird. Für den Konvektionsterm (63) ergibt sich folgende Behandlung: In Anlehnung an Gleichung (34) sei

$$\vec{L}_{ij}^k = \int_{\partial\Omega_{ij}^k} \vec{n} d\Gamma_{ij}^k. \quad (67)$$

Damit ergibt sich für (63)

$$V_{ij} \cdot \int_{\partial\Omega_{ij}} U \vec{n} d\Gamma_{ij} \approx V_{ij} \cdot \sum_{k=l,r,u,d} \vec{L}_{ij}^k \tilde{U}_{ij}^k. \quad (68)$$

\tilde{U}_{ij}^k ist dabei der Faktor, der durch central weighting, das upwind-Verfahren oder einen Limiter dargestellt wird. Gleichung (64) wird aufgrund des Diffusionstensors etwas anders als in den vorangegangenen Kapiteln behandelt. Sei φ_{ij} die Lagrange-Funktion im Punkt x_{ij} , d.h. es gilt:

$$\varphi_{ij}(x) = \begin{cases} 1 & \text{im Punkt } x = (ih, jh) \\ 0 & \text{an allen anderen Punkten} \end{cases} \quad (69)$$

sowie

$$\sum_{ij} \varphi_{ij} = 1 \quad (70)$$

auf dem gesamten Gebiet Ω . Es gilt:

$$U \approx \sum_{ij} \varphi_{ij} U_{ij}$$

und damit natürlich

$$\nabla U \approx \sum_{ij} \nabla \varphi_{ij} U_{ij}. \quad (71)$$

Somit folgt:

$$\int_{\partial\Omega_{ij}} (D_{ij} \nabla U) \vec{n} d\Gamma_{ij} = \sum_{k=l,r,u,d} \int_{\partial\Omega_{ij}^k} (D_{ij} \nabla U) \vec{n} d\Gamma_{ij}^k. \quad (72)$$

Aufgrund von (71) ergibt sich für (72):

$$\sum_{k=l,r,u,d} \int_{\partial\Omega_{ij}^k} D_{ij} \cdot \sum_{ij} (\nabla \varphi_{ij} U_{ij}) \vec{n} d\Gamma_{ij}^k. \quad (73)$$

Mit einer geeigneten Approximation des Integrals in (73) ist man nun in der Lage, eine diskretisierte Form von (61) anzugeben:

$$\begin{aligned} h^2 \left(\frac{U_{ij}^{n+1} - U_{ij}^n}{\Delta t} \right) &= \theta \left(-V_{ij} \cdot \sum_{k=l,r,u,d} \vec{L}_{ij}^k \tilde{U}_{ij_k}^{n+1} + \sum_{k=l,r,u,d} D_{ij} \vartheta_{ij_k}^{n+1} - h^2 r U_{ij}^{n+1} \right) \\ &+ (1 - \theta) \left(-V_{ij} \cdot \sum_{k=l,r,u,d} \vec{L}_{ij}^k \tilde{U}_{ij_k}^n + \sum_{k=l,r,u,d} D_{ij} \vartheta_{ij_k}^n - h^2 r U_{ij}^n \right) + p_{ij}. \end{aligned} \quad (74)$$

Dabei gilt $\vartheta_{ij_k}^n = \int_{\partial\Omega_{ij}^k} \sum_{ij} (\nabla \varphi_{ij} U_{ij}^n) \vec{n} d\Gamma_{ij}^k$. Der Parameter θ ist ein entscheidender Wichtungsfaktor. So wird (74) im Fall $\theta = 0$ zu einem expliziten, mit $\theta = 1$ zu einem impliziten Schema. Für $\theta = \frac{1}{2}$ handelt es sich um ein Crank-Nicolson-Verfahren (siehe Zvan et. al. [26, 711-714]).

6.2 Randpunkte

Durch (11)-(12), (19)-(20) und (28) sind die Entwicklungen der Optionen auf den Randgebieten erklärt. Die Diskretisierung dieser Ränder scheint weniger problematisch, da in den Randbedingungen ein reellwertiger Diffusionsfaktor statt einer Matrix vorkommt. Exemplarisch wird hier die Randdiskretisierung einer worst of two assets Option für den Fall $S_1 \rightarrow 0$ angegeben. Das Verfahren ist implizit:

$$\begin{aligned} \frac{U_{ij}^{n+1} - U_{ij}^n}{\Delta t} &= \frac{1}{2} \sigma_2^2 S_2^2 \left(\frac{U_{i,j-1}^{n+1} - 2U_{i,j}^{n+1} + U_{i,j+1}^{n+1}}{h^2} \right) \\ &+ r S_2 \left(\frac{U_{i,j+1}^{n+1} - U_{i,j-1}^{n+1}}{2h} \right) - r U_{ij}^{n+1} + p_{ij}^{n+1}. \end{aligned} \quad (75)$$

Der Konvektionsterm erfährt im Fall des upwind-Schemas oder bei der Nutzung von flux-Limitern entsprechende Modifikationen. Alle weiteren Ränder werden analog diskretisiert.

6.3 Diskretisierung mit flux-Limitern

In Kapitel 4.2 wurden flux-Limiter eingeführt, um die im upwind-Schema auftretende numerische Diffusion zu dämpfen. Die Übertragung des vorgestellten Verfahrens auf die behandelten Optionen ist nicht weiter schwierig, die Änderung in (74) bezieht sich lediglich auf den Konvektionsterm. Gleiches gilt für modifizierte flux-Limiter. Letztendlich muss in (67) \tilde{U}_{ij}^k durch das jeweilige Verfahren ersetzt werden.

Zvan et. al [26, 727-731] haben für Triangulierungen gezeigt, unter welchen Bedingungen das modifizierte Schema (52) positive Koeffizienten liefert. Im vorliegenden Fall von äquidistanten quadratischen finiten Volumen sieht das Ergebnis ähnlich aus. (52) besitzt positive Koeffizienten, wenn die Ungleichung

$$\sum_{k=l,r,u,d} \left(-\bar{\alpha}_{ij}^k + \frac{\bar{\beta}_{ij}^k}{2} \right) \leq \frac{1}{1-\theta} \quad (76)$$

erfüllt ist. Hierbei ist θ der Wichtungsfaktor aus (74) und es ist

$$\bar{\alpha}_{ij}^k = \frac{\Delta t}{h^2} \cdot \min(\vec{L}_{ij}^k V, 0)$$

sowie

$$\bar{\beta}_{ij}^k = \frac{\Delta t}{h^2} \cdot \max(\vec{L}_{ij}^k V, 0).$$

Die Herleitung von Bedingung (76) erfolgt im Anhang.

Bei Verwendung eines impliziten Schemas ($\theta = 1$) ist (76) offensichtlich immer erfüllt.

7 Numerische Tests

In diesem Kapitel sollen die beschriebenen Verfahren anhand der in Kapitel 2.3 eingeführten und in Kapitel 6 diskretisierten Derivate getestet werden. Es wurde besonders darauf geachtet, realistische, d.h. marktübliche Parameter für die Tests zu verwenden. Für die Experimente wurde stets ein volles implizites Schema verwendet ($\theta = 1$ in (74)), so dass (76) immer erfüllt ist. Durch die Nichtlinearität der Limiter-Funktionen wurden die Limiter-Verfahren mit dem vereinfachten Newtonverfahren gelöst, bei dem Ableitungen für die Jacobi-Matrix angenähert werden und welches linear konvergiert (siehe dazu Hanke-Bourgeois [10, 176f.]). Alle in diesem Kapitel verwendeten Programme liegen der Arbeit in elektronischer Form als matlab-files, womit die Tests auch durchgeführt wurden, vor.

7.1 Worst of two assets Optionen

Zunächst sollen die beschriebenen Verfahren an der Diskretisierung von worst of two assets Optionen getestet werden. Diese Optionen eignen sich gut für einen ersten Test, da analytische Ergebnisse vorliegen (siehe Stulz [21, 165-167]) und für realistische Parameter die PDG nicht konvektionsdominant ist. Der Testfall ist ein europäischer worst of two assets Put ein halbes Jahr vor dem Verfallsdatum ($t = 0.5$). Die Parameter lauten $r = 0.05$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.3$, $\rho = 0.5$ und $K = 40$. Abbildung 12 zeigt einen solchen Put. Zur Beurteilung der Konvergenz wurde der punktweise Fehler im Punkt $S_1 = S_2 = 40$ betrachtet, für das Grundgebiet gilt $S_1, S_2 \in [0, 80]$. Die analytische Lösung in diesem Punkt lautet $U = 4.268$. Die Ergebnisse sind in den folgenden Tabellen dargestellt

central weighting					
Δt	$h = 4$	$h = 2$	$h = 1$	$h = 0.5$	$h = 0.25$
0.02	0.1856	0.0639	0.0351	0.0280	0.0262
0.01	0.1714	0.0509	0.0223	0.0153	0.0135
0.005	0.1643	0.0444	0.0159	0.0089	0.0071

Tabelle 4: Punktweiser Fehler eines worst of two assets Puts bei $S_1 = 40$, $S_2 = 40$ und $t = 0.5$, diskretisiert mit zentralen Differenzen

Bei der Anwendung eines central weighting wird eine quadratische Konvergenz mit Verfeinerung des Gitters erwartet. Tabelle 4 zeigt den punktweisen Fehler für die Diskretisierung mit zentralen Differenzen. Die Konvergenz ist nur in Bereichen großer Schrittweiten recht stark und erreicht dort annähernd zweite Ordnung. Im

Bereich kleinerer h dominiert der Fehler in der zeitlichen Diskretisierung, wobei lineare Konvergenz vorliegt. Die Fehlerentwicklung des central weighting-Verfahrens

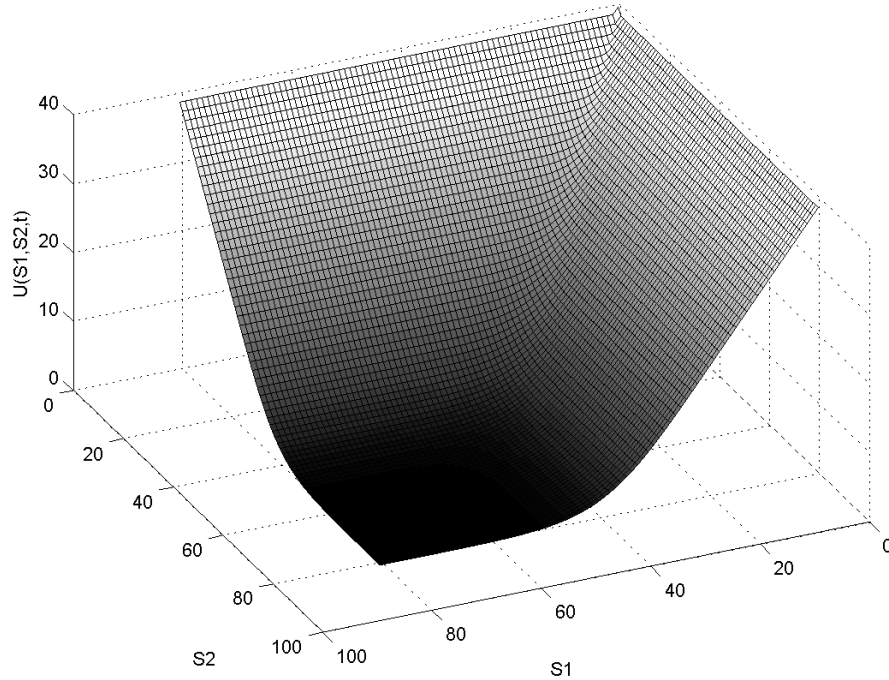


Abbildung 12: Europäischer worst of two assets Put zum Zeitpunkt $t = 0.5$

zeigt keine Oszillationen, die Peclet-Bedingung scheint demnach erfüllt zu sein. Zum Vergleich seien dennoch die Fehler im upwind-Schema betrachtet. Erwartet wird hier eine lineare Konvergenz. Tabelle 5 zeigt sehr deutlich, dass das Verfahren mit erster Ordnung im Ort konvergiert. Die Koeffizienten der Fehlerentwicklung bewegen sich um den Wert 2. Auch hier erreicht der zeitliche Fehler für kleine h eine akzeptable Konvergenz, wobei Ordnung 1 nicht ganz erreicht wird.

upwind					
Δt	$h = 4$	$h = 2$	$h = 1$	$h = 0.5$	$h = 0.25$
0.02	0.3747	0.1539	0.0795	0.0501	0.0372
0.01	0.3608	0.1412	0.0690	0.0375	0.0246
0.005	0.3539	0.1348	0.0606	0.0311	0.0182

Tabelle 5: Punktwiser Fehler eines worst of two assets Puts bei $S_1 = 40$, $S_2 = 40$ und $t = 0.5$, diskretisiert mit dem upwind-Verfahren

Der Einsatz von flux-Limitern ist eigentlich nicht notwendig, da, wie bereits erwähnt, bei Verwendung von marktüblichen Parametern keine Konvektionsdominanz vorliegt. Um die Limiter zu testen, sollen diese Schemata trotzdem benutzt werden.

Zunächst seien die Original-Limiter verwendet. Erwartet wird hier lineare Konvergenz. Die Tabellen 6 und 7 zeigen hierzu die Ergebnisse.

van Leer Limiter					
Δt	$h = 4$	$h = 2$	$h = 1$	$h = 0.5$	$h = 0.25$
0.02	0.1682	0.0581	0.0334	0.0275	0.0261
0.01	0.1539	0.0452	0.0207	0.0148	0.0134
0.005	0.1467	0.0387	0.0143	0.0085	0.0070

Tabelle 6: Punktweiser Fehler eines worst of two assets Puts bei $S_1 = 40$, $S_2 = 40$ und $t = 0.5$, diskretisiert mit dem van Leer Limiter

van Albada Limiter					
Δt	$h = 4$	$h = 2$	$h = 1$	$h = 0.5$	$h = 0.25$
0.02	0.1693	0.0585	0.0335	0.0275	0.0261
0.01	0.1550	0.0456	0.0208	0.0148	0.0134
0.005	0.1479	0.0391	0.0144	0.0085	0.0070

Tabelle 7: Punktweiser Fehler eines worst of two assets Puts bei $S_1 = 40$, $S_2 = 40$ und $t = 0.5$, diskretisiert mit dem van Albada Limiter

Sowohl bei Verwendung des van Leer Limiters als auch des van Albada Limiters zeigt sich bei grober Schrittweite eine starke Konvergenz zwischen erster und zweiter Ordnung. Mit zunehmend feinerem h nimmt die Konvergenzgeschwindigkeit stark ab, wie es auch schon bei den zentralen Differenzen zu beobachten war. Akzeptable Konvergenz im zeitlichen Fehler (erste Ordnung) wird erst bei kleineren Schrittweiten erreicht, da die Dominanz des örtlichen Fehlers abnimmt.

modifizierter van Leer Limiter					
Δt	$h = 4$	$h = 2$	$h = 1$	$h = 0.5$	$h = 0.25$
0.02	0.2365	0.0979	0.0545	0.0383	0.0315
0.01	0.2221	0.0849	0.0418	0.0257	0.0189
0.005	0.2149	0.0783	0.0354	0.0193	0.0125

Tabelle 8: Punktweiser Fehler eines worst of two assets Puts bei $S_1 = 40$, $S_2 = 40$ und $t = 0.5$, diskretisiert mit dem modifizierten van Leer Limiter

Der Einsatz der modifizierten Limiter-Schemata soll die Konvergenzordnung erhöhen. Tabelle 8 und Tabelle 9 geben die Fehlerentwicklung für die modifizierten flux-Limiter wieder. Es zeigt sich hierbei, dass der Einsatz modifizierter Limiter keinen Vorteil bringt. Die Fehlerentwicklung ist schlechter als bei Verwendung der Original-Limiter.

modifizierter van Albada Limiter					
Δt	$h = 4$	$h = 2$	$h = 1$	$h = 0.5$	$h = 0.25$
0.02	0.2135	0.0895	0.0521	0.0376	0.0314
0.01	0.1992	0.0765	0.0393	0.0250	0.0186
0.005	0.1921	0.0700	0.0329	0.0186	0.0123

Tabelle 9: Punktweiser Fehler eines worst of two assets Puts bei $S_1 = 40$, $S_2 = 40$ und $t = 0.5$, diskretisiert mit dem modifizierter van Albada Limiter

$\lambda = 5$					
Δt	$h = 4$	$h = 2$	$h = 1$	$h = 0,5$	$h = 0,25$
0,02	0.0735	0.0375	0.0286	0.0264	0.0258
0,01	0.0606	0.0248	0.0159	0.0137	0.0131
0,005	0.0541	0.0184	0.0095	0.0072	0.0068
$\lambda = 7$					
Δt	$h = 4$	$h = 2$	$h = 1$	$h = 0,5$	$h = 0,25$
0,02	0.0643	0.0353	0.0280	0.0262	0.0257
0,01	0.0514	0.0225	0.0153	0.0135	0.0131
0,005	0.0450	0.0162	0.0090	0.0072	0.0067

Tabelle 10: Punktweiser Fehler eines worst of two assets Puts bei $S_1 = 40$, $S_2 = 40$ und $t = 0.5$, gelöst auf gradierten Gittern mit zentralen Differenzen und unterschiedlichen λ

Um punktweise die Konvergenz zu verbessern, den Rechenaufwand aber nicht zu erhöhen, wurden in Kapitel 5.1 gradierte Gitter eingeführt. Tabelle 10 zeigt die Ergebnisse für modifizierte Gitter, die um den Punkt $(S_1, S_2) = (40, 40)$ mit der Gradierungsfunktion (51) und zwei unterschiedlichen Gradierungsparametern λ lokal verfeinert wurden. Für den Test auf gradierten Gittern wurde das central weighting-Verfahren angewendet. Die Ergebnisse sind demnach mit denen aus Tabelle 4 zu vergleichen. Es wird deutlich, dass sämtliche Ergebnisse im Punkt $(40, 40)$ besser sind als im äquidistanten Gitter und ebenfalls eine Verbesserung eintritt, je stärker das Gitter um den Punkt verfeinert wird, d.h. je größer λ wird. Das entspricht der Erwartung. Auffällig ist jedoch, dass die Verbesserung bei gradierten Gittern gegenüber solchen mit äquidistanter Schrittweite schwächer wird, je feiner das Gitter diskretisiert wird.

Der Einsatz der Kombinationstechnik soll, bei einer akzeptablen Fehlerentwicklung, die Anzahl der auszuwertenden Punkte reduzieren, mit dem Effekt, dass die Rechenzeit verkürzt und der Speicheraufwand verringert wird. Die Schrittweiten wurden für die einzelnen Level dem Grundgebiet angepasst. Da $S_1, S_2 \in [0, 80]$, gilt

volles Gitter				
Δt	level = 5	level = 6	level = 7	level = 8
0.05	0.2378	0.1338	0.0946	0.0780
0.02	0.1994	0.0961	0.0570	0.0403
0.01	0.1866	0.0835	0.0443	0.0277
0.005	0.1801	0.0772	0.0380	0.0213

Tabelle 11: Punktweiser Fehler eines worst of two assets Puts bei $S_1 = 40$, $S_2 = 40$ und $t = 0.5$, auf vollem Gitter mit dem upwind-Verfahren

Kombinationstechnik						
Δt	level = 5	level = 6	level = 7	level = 8	level = 9	level = 10
0.05	0.1772	0.3056	0.0304	0.0172	0.0444	0.0472
0.02	0.2194	0.3454	0.0649	0.0520	0.0073	0.0098
0.01	0.2335	0.3587	0.0765	0.0637	0.0052	0.0027
0.005	0.2406	0.3653	0.0822	0.0696	0.0114	0.0090

Tabelle 12: Punktweiser Fehler eines worst of two assets Puts bei $S_1 = 40$, $S_2 = 40$ und $t = 0.5$, gelöst mit der Kombinationstechnik und upwind-Verfahren

$h_k = 80 \cdot 2^{-k}$. Um die Ergebnisse der Kombinationstechnik mit denen auf einem vollen Gitter vergleichen zu können, zeigt Tabelle 11 noch einmal den Fehler für ein volles Gitter, wobei als Schrittweite diesmal die verschiedenen Level verwendet wurden. Die PDG wurde sowohl auf dem vollen Gitter als auch bei den Tests der Kombinationstechniken mit dem upwind-Verfahren diskretisiert.

Tabelle 12 gibt den punktweisen Fehler für die Referenzoption, gelöst mit der Kombinationsmethode wieder. Es zeigt sich, dass die Kombinationstechnik bei partiellen Differentialgleichungen mit Singularitäten, wie sie durch die Anfangsbedingungen der Optionen auftreten, erhebliche Mängel aufweist. Bei der Kombinationstechnik unter Einbezug aller Teilgitter liegt eine akzeptable Konvergenz im Ort vor. Allerdings divergiert der Fehler in der Zeit. Tabelle 13 zeigt die Ergebnisse für die Kombinationstechnik, bei der stark anisotrope Gitter in der Kombination ausgeschlossen wurden. Dabei ist $n^* = n - 2$ (siehe Gleichung (60)). Die reduzierte Kombinationstechnik zeigt ab Level 6 eine verbesserte Konvergenz im Ort, ausgenommen ein Sprung bei Level 9, der möglicherweise von der Extrapolation verursacht wird. Außerdem konvergiert der zeitliche Fehler, für große Level sogar stärker als linear. Zusammenfassend bleibt zu bemerken, dass die Kombinationstechnik einige Schwächen in der Konvergenz (sowohl im Ort, als auch in der Zeit bei der vollen Kombinationsmethode) aufweist. Auch laufen durch die Singularität die Verfahren instabil.

reduzierte Kombinationstechnik						
Δt	level = 5	level = 6	level = 7	level = 8	level = 9	level = 10
0.05	1.7932	0.2723	0.1466	0.0490	0.0722	0.0598
0.02	1.7636	0.2226	0.1107	0.0141	0.0352	0.0225
0.01	1.7535	0.2060	0.0988	0.0024	0.0227	0.0100
0.005	1.7483	0.1977	0.0928	0.0035	0.0165	0.0038

Tabelle 13: Punktweiser Fehler eines worst of two assets Puts bei $S_1 = 40$, $S_2 = 40$ und $t = 0.5$, gelöst mit der reduzierten Kombinationstechnik und upwind-Verfahren

Rechenzeiten				
Methode	level = 5	level = 6	level = 7	level = 8
volles Gitter	1.00	5.07	35.57	423.90
Kombinationstechnik	0.42	0.87	1.91	4.40
reduzierte Kombinationstechnik	0.17	0.39	1.00	2.68

Tabelle 14: Benötigte Rechenzeiten zur Lösung mit verschiedenen Gittern, normiert auf volles Gitter mit Level 5

Vergleicht man allerdings die benötigte Rechenzeit mit einem vollen Gitter, so ist die Kombinationstechnik klar im Vorteil. Tabelle 14 zeigt die Rechenzeiten zur Lösung des worst of two assets Puts für die verschiedenen Diskretisierungen und Level, mit $\Delta t = 0.02$. Die Einträge in Tabelle 14 zeigen den Aufwand relativ zu der Rechendauer auf einem vollen Gitter mit Level 5. Die Stärke der Kombinationstechnik zeigt sich dabei deutlich, vor allem für große Level.

7.2 Asiatische Optionen

Für asiatische Optionen existiert keine analytische Lösung, so dass eine Fehleranalyse nicht durchgeführt werden kann. Trotzdem soll mit den errechneten Daten die Konvergenz der einzelnen Verfahren analysiert und damit die Limiter getestet werden. Gegenstand der Untersuchung ist ein asiatischer fixed strike Call drei Monate vor dem Verfallsdatum ($t = 0.25$) mit den Parametern $r = 0.1$ und $\sigma_S = 0.1$ sowie einem Ausübungskurs $E = 50$ für den ersten und $E = 60$ für den zweiten Test. Für das Grundgebiet gilt $S, A \in [0, 100]$. Abbildung 13 zeigt eine solche Option.

Die Schwierigkeit bei der Diskretisierung besteht in der Beschaffenheit der PDG. Diese ist ausgeartet, da die Diffusion nur in eine der Koordinatenrichtungen wirkt (siehe Gleichung (18)). Die Konvektion wirkt in beide Richtungen (Gleichung (17)). Die Diskretisierung dieser Option kann als Test für die Robustheit der verwendeten

Verfahren gesehen werden. Daher wurde dieser Typ von Option gewählt, um die Limiter-Schemata zu testen (Zvan et. al. [26, 721]).

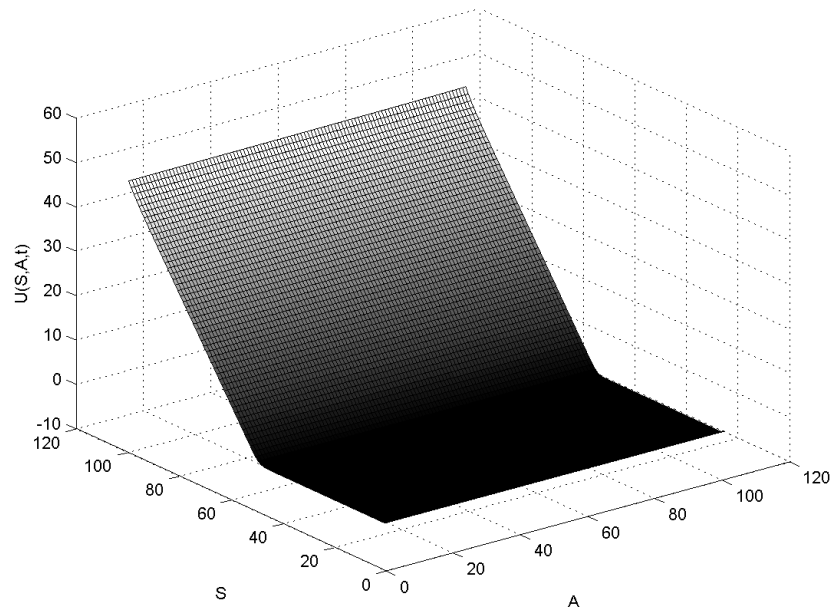


Abbildung 13: Asiatischer fixed strike Call zum Zeitpunkt $t = 0.25$

Die Tabellen 15 und 16 zeigen die Wertentwicklungen der Optionen im Punkt $S = 60, A = 60$, gelöst mit den Limiter-Schemata.

Δt	van Leer Limiter				modifizierter van Leer Limiter			
	$h = 4$	$h = 2$	$h = 1$	$h = 0.5$	$h = 4$	$h = 2$	$h = 1$	$h = 0.5$
0.01	10.5002	10.5167	10.5077	10.5077	10.4991	10.5083	10.5076	10.5077
0.005	10.4857	10.5022	10.4934	10.4934	10.4843	10.4941	10.4934	10.4934
0.0025	10.4784	10.4950	10.4862	10.4862	10.4769	10.4870	10.4862	10.4862

Tabelle 15: Werte eines asiatischen fixed strike Calls im Punkt $S = 60, A = 60$ mit $E = 50$ zum Zeitpunkt $t = 0.25$, gelöst mit dem van Leer Limiter und dem modifizierten van Leer Limiter

Die Diskretisierungen mit dem van Leer Limiter zeigen sowohl im modifizierten Fall als auch im Originalschema eine recht schnelle Konvergenz. Bereits bei einer Schrittweite von 1 ändert sich die Lösung praktisch nicht mehr. Dabei weist das modifizierte Schema eine bessere Konvergenz auf. Betrachtet man die Änderungsquotienten in der Lösung so bewegen sich diese für das Original-Schema um den Wert 2, was auf eine lineare Konvergenz hindeutet. Im modifizierten Fall sind diese Quotienten wesentlich höher und weisen sogar einen höheren Wert als 4 auf. Die Konvergenz ist also besser als quadratisch.

Beim Test der van Albada Limiter wurde der Ausübungskurs $E = 60$ gesetzt, wodurch der betrachtete Punkt genau auf dem Knick in der Anfangsbedingung liegt. Das modifizierte Schema ist in diesem Fall deutlich besser als das Original Schema. Die Änderungsraten der Optionswerte sind größer und die Konvergenz schneller. Offenbar wird der Vorteil der modifizierten Schemata an solchen kritischen Stellen deutlich.

Δt	van Albada Limiter				modifizierter van Albada Limiter			
	$h = 4$	$h = 2$	$h = 1$	$h = 0.5$	$h = 4$	$h = 2$	$h = 1$	$h = 0.5$
0.01	0.5586	0.9475	1.0999	1.1207	0.8518	1.0622	1.1255	1.1282
0.005	0.5397	0.9267	1.0840	1.1044	0.8291	1.0438	1.1101	1.1121
0.0025	0.5302	0.9162	1.0762	1.0962	0.8176	1.0347	1.1025	1.1040

Tabelle 16: Werte eines asiatischen fixed strike Calls im Punkt $S = 60$, $A = 60$ mit $E = 60$ zum Zeitpunkt $t = 0.25$, gelöst mit dem van Albada Limiter und dem modifizierten van Albada Limiter

7.3 Wandelanleihen

Um die Kombinationstechnik zu testen, wurde das Verfahren auf Wandelanleihen angewendet. Für Wandelanleihen liegen ebenfalls keine analytischen Ergebnisse vor, so dass wie bei den asiatischen Optionen die Konvergenz über die Änderung der errechneten Werte betrachtet wird. Für die Experimente ist zu beachten, dass auf dem Grundgebiet in beide Richtungen mit unterschiedlichen Größenordnungen gerechnet und S und r auf unterschiedlichen Intervallen diskretisiert wurden. Es wurde $S \in [0, 60]$ und $r \in [0, 0.3]$ gesetzt. Dementsprechend wurden die Schrittweiten für die einzelnen Level normiert. Es gilt somit für Level k in x -Richtung $h_k = 60 \cdot 2^{-k}$ und in y -Richtung $h_k = 0.3 \cdot 2^{-k}$.

Testparameter			
$\sigma_S = 0.25$	$\sigma_r = 0.03$	$\rho = -0.5$	$a = 0.58$
$b = 0.0345$	$c = 0.5$	$\lambda = 0$	$\omega = 2$
$C_P = 105$	$F = 80$	$T = 10$	$coupon = 0.05$

Tabelle 17: Verwendete Parameter für Test der Wandelanleihen

Alle Tests für Wandelanleihen wurden mit den in Tabelle 17 stehenden Parametern durchgeführt. Zusätzlich wurde auf die Anleihe für den ersten Test ein jährlicher Coupon von 5% gezahlt.

Zunächst wurde die PDG für Wandelanleihen auf einem vollen Gitter gelöst. Für die Diskretisierung wurde der van Leer Limiter benutzt. Tabelle 18 zeigt die Ergebnisse für verschiedene Level im Punkt $S = 30$, $r = 0.15$.

volles Gitter					
Δt	$level = 3$	$level = 4$	$level = 5$	$level = 6$	$level = 7$
0.25	92.6018	92.2782	92.2233	92.1982	92.1868
0.125	92.6156	92.2378	92.1779	92.1519	92.1405
0.0625	92.6653	92.2429	92.1780	92.1507	92.1392

Tabelle 18: Werte einer Wandelanleihe im Punkt $S = 30$, $r = 0.15$ zum Zeitpunkt $t = 10$, diskretisiert mit dem van Leer Limiter

Auf einem vollen Gitter erreicht das Verfahren mit dem Original van Leer Limiter für hohe Level lineare Konvergenz im Ort. Das zeigen die Quotienten der Änderung des Anleihewertes. Diese bewegen sich um den Wert 2 und entsprechen somit den theoretischen Aussagen.

reduzierte Kombinationstechnik					
Δt	$level = 3$	$level = 4$	$level = 5$	$level = 6$	$level = 7$
0.25	94.9906	91.4251	90.7927	90.8543	90.6714
0.125	95.1151	91.4016	90.6750	90.7615	90.6489
0.0625	95.1904	91.4500	90.6636	90.7746	90.7231

Tabelle 19: Werte einer Wandelanleihe im Punkt $S = 30$, $r = 0.15$ zum Zeitpunkt $t = 10$, diskretisiert mit dem van Leer Limiter und der reduzierten Kombinationstechnik

Die reduzierte Kombinationstechnik ($n^* = n - 1$) liefert für höhere Level akzeptable Ergebnisse. Für niedrige Level scheint die Schrittweite noch zu grob. Ab Level 5 pendeln sich die Ergebnisse um einen Wert ein, der eine geringfügige und damit akzeptable Abweichung zu den Werten auf dem vollen Gitter aufweist.

volles Gitter					
Δt	$level = 3$	$level = 4$	$level = 5$	$level = 6$	$level = 7$
0.25	61.9007	60.9865	60.8882	60.8565	60.8419
0.125	61.8280	60.9724	60.8796	60.8477	60.8329
0.0625	61.8230	60.9975	60.9070	60.8746	60.8598

Tabelle 20: Werte einer Wandelanleihe im Punkt $S = 15$, $r = 0.15$ zum Zeitpunkt $t = 10$, diskretisiert mit dem van Albada Limiter

Die Ergebnisse für den zweiten Test der Wandelanleihen (diskretisiert mit dem van Albada Limiter) zeigen ähnliche Ergebnisse wie der Test mit dem van Leer Limiter. Auch in diesem Fall sind die Konvergenzraten ungefähr von erster Ordnung.

reduzierte Kombinationstechnik					
Δt	<i>level</i> = 3	<i>level</i> = 4	<i>level</i> = 5	<i>level</i> = 6	<i>level</i> = 7
0.25	67.1014	60.0236	58.3522	58.3838	58.3073
0.125	67.0075	59.8325	58.2535	58.5266	58.5184
0.0625	66.9518	59.7994	58.2611	58.6773	58.6981

Tabelle 21: Werte einer Wandelanleihe im Punkt $S = 15$, $r = 0.15$ zum Zeitpunkt $t = 10$, diskretisiert mit dem van Albada Limiter und der reduzierten Kombinationstechnik

Ebenso sind die Ergebnisse für die reduzierte Kombinationstechnik mit denen vom ersten Test vergleichbar. Auch hier zeigt sich erst für höhere Level eine Entwicklung ohne Oszillationen und die Abweichungen zu den Ergebnissen auf dem vollen Gitter befinden sich auf einem akzeptablen Niveau.

8 Schlußbemerkung

Die vorliegende Arbeit beschäftigte sich mit der Bewertung von zweidimensionalen Finanzderivate und die numerische Behandlung von partiellen Differentialgleichungen, welche die Entwicklung dieser Derivate beschreiben. Zur Diskretisierung der zugrunde liegenden Differentialgleichungen wurden finite Volumen Methoden verwendet.

Ziel der Arbeit war es, Verfahren zu entwickeln, die stabil mit höherer als linearer Konvergenz laufen aber auch relativ kurze Rechenzeiten aufweisen.

Zunächst wurden flux-Limiter eingeführt, um einer auftretenden Konvektionsdominanz zu begegnen. Diese hätte zur Folge, dass auf groben Gittern das Verfahren Oszillationen aufweist. Da das upwind-Verfahren dem zwar Abhilfe schafft, aber eine relativ schlechte Konvergenz aufweist (erste Ordnung), musste nach Alternativen gesucht werden. Die vorgestellten flux-Limiter (van Leer und van Albada) weisen allerdings ebenfalls nur lineare Konvergenz auf, so dass ein modifiziertes Limiter-Schema konstruiert wurde, welches höhere Konvergenz erreichen soll.

Um lokal um einen Punkt die Diskretisierung zu verfeinern, den Aufwand aber nicht zu erhöhen, wurden gradierte Gitter eingeführt. Diese machen bei Optionsbewertungen Sinn, da durch Knicke in den Anfangsbedingungen Singularitäten vorliegen, um die gezielt verfeinert werden kann.

Die Kombinationsmethode wurde schließlich eingeführt, um den Rechenaufwand und damit die Rechenzeit zu verringern. Dabei zerfällt das Problem in mehrere Teilprobleme, wird auf kleineren Teilgittern gelöst und am Ende wieder zu einem vollen Gitter zusammengesetzt. Der Fehler verschlechtert sich dabei nur unwesentlich.

Die experimentellen Ergebnisse für die Derivate zeigen nur teilweise die theoretischen Vermutungen. Upwind-Verfahren und Original-Limiter bringen die erwartete lineare Konvergenz. Das modifizierte Limiter-Schema erreichte bei den Tests der worst of two assets Option allerdings nicht die erhoffte höhere Konvergenz, weist aber eine bessere Fehlerentwicklung als das upwind-Verfahren auf. Im Fall der asiatischen Option war die Fehlerentwicklung der modifizierten Schemata im Vergleich zu den Original-Limitern jedoch (teilweise deutlich) besser.

Experimente mit der Kombinationsmethode zeigen unterschiedliche Ergebnisse. Das Verfahren läuft erst für höhere Level stabil. Probleme gibt es außerdem bei stark anisotropen Gittern. Deshalb wurde eine modifizierte Kombinationsformel

angegeben, die Gitter mit starken Unterschieden in den Schrittweiten beider Koordinaten aus der Kombination heraus nimmt. Diese reduzierte Kombinationsformel weist bessere Ergebnisse auf. Der Grund für die schlechte Fehlerentwicklung liegt in der nicht ausreichenden Glattheit der Funktion, was durch die Anfangsbedingungen der Optionen entsteht. Hier zeigt sich eine erhebliche Schwäche der Kombinationsmethode. Allerdings ist der Speicheraufwand und die Rechenzeit auf vollen Gittern wesentlich höher, so dass die Kombinationsmethode bei hohen Level deutlich vorteilhafter ist.

Literatur

- [1] J. Bey. *Finite-Volumen- und Mehrgitter-Verfahren für elliptische Randwertprobleme*. Teubner, Stuttgart [u.a.], 1998.
- [2] F. Black, M. Scholes. *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*. Journal of Political Economy, 81, 637-654, 1973.
- [3] H.-J. Bungartz, M. Griebel, U. Rüde. *Extrapolation, Combination and Sparse Grid Techniques for Elliptic Boundary Value Problems*. SFB Bericht 342/24/92, Technische Universität München, 1992.
- [4] J. Garcke. *Berechnung von Eigenwerten der stationären Schrödingergleichung mit der Kombinationstechnik*. Diplomarbeit, Universität Bonn, 1998.
- [5] J. B. Goodman, R. J. LeVeque. *On the Accuracy of Stable Schemes for 2D Scalar Conservation Laws*. Mathematics of Computation, 45, 15-21, 1985.
- [6] M. Griebel. *The Combination Technique for the Sparse Grid Solution of PDE's on Multiprocessor Machines*. SFB Bericht 342/14/91, Technische Universität München, 1991.
- [7] M. Griebel, M. Schneider, C. Zenger. *A Combination Technique for the Solution of Sparse Grid Problems*. SFB Bericht 342/19/90, Technische Universität München, 1991.
- [8] M. Griebel, V. Thurner. *The Efficient Solution of Fluid Dynamics Problems by the Combination Technique*. International Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow, 5, 251-269, 1995.
- [9] C. Großmann, H.-G. Roos. *Numerische Behandlung partieller Differentialgleichungen*. Teubner, Wiesbaden, 2005.
- [10] M. Hanke-Bourgeois. *Grundlagen der Numerischen Mathematik und des Wissenschaftlichen Rechnens*. Teubner, Wiesbaden, 2002.
- [11] S. Hilgenfeldt. *Numerische Lösung der stationären Schrödingergleichung mit Finite-Element-Methoden auf dünnen Gittern*. Diplomarbeit, Technische Universität München, 1994.
- [12] P. Knabner, L. Angermann. *Numerik partieller Differentialgleichungen*. Springer, Berlin [u.a.], 2000.

- [13] R. Kreißl. *Simulation laminarer Strömungen in komplexen Geometrien mit der Kombinationsmethode*. Diplomarbeit, Technische Universität München, 1997.
- [14] R. D. Lazarov, I. D. Mishev, P. S. Vassilevski. *Finite Volume Methods for Convection-Diffusion Problems*. SIAM Journal on Numerical Analysis, 33, 31-55, 1996.
- [15] R. J. Leveque. *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [16] R. C. Merton. *Theory of Rational Option Pricing*. The Bell Journal of Economics and Management Science, 4, 141-183, 1973.
- [17] K. W. Morton. *Numerical Solution of Convection-Diffusion Problems*. Chapman & Hall, London [u.a.], 1996.
- [18] C. Reisinger. *Numerische Methoden für hochdimensionale parabolische Gleichungen am Beispiel von Optionspreisaufgaben*. Dissertation, Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg, 2004.
- [19] R. Seydel. *Einführung in die numerische Berechnung von Finanzderivaten: Computational Finance*. Springer, Berlin [u.a.], 2000.
- [20] S. Spekreijse. *Multigrid Solution of Monotone Second-Order Discretizations of Hyperbolic Conservation Laws*. Mathematics of Computation, 49, 135-155, 1987.
- [21] R. M. Stulz. *Options on the Minimum or the Maximum of Two Risky Assets*. Journal of Financial Economics, 10, 161-185, 1982.
- [22] P. K. Sweby. *High Resolution Schemes using Flux Limiters for Hyperbolic Conservation Laws*. SIAM Journal on Numerical Analysis, 21, 995-1011, 1984.
- [23] P. Wilmott, S. Howison, J. Dewynne. *The Mathematics of Financial Derivatives*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [24] C. Zenger. *Sparse Grids*. in W. Hackbusch (Hrsg.): *Parallel Algorithms for Partial Differential Equations*, Proceedings of the Sixth GAMM-Seminar, Kiel, January 19-21, 1990, 241-251. Vieweg, Braunschweig, 1991.
- [25] R. Zvan, P. A. Forsyth, K. R. Vetzal. *Penalty Methods for American Options with Stochastic Volatility*. Journal of Computational and Applied Mathematics, 91, 199-218, 1998.

- [26] R. Zvan, P. A. Forsyth, K. R. Vetzal. *A Finite Volume approach for Contingent Claim Valuation*. IMA Journal of Numerical Analysis, 21, 703-731, 2001.

Abbildungsverzeichnis

1	Wert eines europäischen Calls zum Zeitpunkt T	14
2	Wert eines europäischen Puts zum Zeitpunkt T	15
3	Wert eines <i>worst of two assets</i> Puts zum Zeitpunkt T	16
4	<i>Cell-centered</i> und <i>cell-vertex</i> Finite Volumen	22
5	Bezeichnung der Randstücke des Kontrollvolumens und der Nach- barpunkte von u_{ij}	23
6	Problem (37) diskretisiert mit zentralen Differenzen	27
7	Problem (37) diskretisiert mit dem upwind-Verfahren	28
8	Zweidimensionales gradiertes Gitter	33
9	Nodale und hierarchische Basisfunktionen vom Level 3	35
10	Funktion (44) und ihre Darstellung in hierarchischen Basen mit Level 5	36
11	Volles und dünnes Gitter vom Level 4	37
12	Europäischer <i>worst of two assets</i> Put zum Zeitpunkt $t = 0.5$	45
13	Asiatischer <i>fixed strike</i> Call zum Zeitpunkt $t = 0.25$	50

Tabellenverzeichnis

1	Vergleich der Fehlerentwicklung der central weighting- und upwind-Diskretisierung für Problem (37)	27
2	Vergleich der Fehlerentwicklung der central weighting- und upwind-Diskretisierung für Problem (44)	30
3	Fehlerentwicklung für Problem (44) gelöst mit der Kombinations-technik und auf einem vollen Gitter	38
4	Punktweiser Fehler eines worst of two assets Puts bei $S_1 = 40$, $S_2 = 40$ und $t = 0.5$, diskretisiert mit zentralen Differenzen	44
5	Punktweiser Fehler eines worst of two assets Puts bei $S_1 = 40$, $S_2 = 40$ und $t = 0.5$, diskretisiert mit dem upwind-Verfahren	45
6	Punktweiser Fehler eines worst of two assets Puts bei $S_1 = 40$, $S_2 = 40$ und $t = 0.5$, diskretisiert mit dem van Leer Limiter	46
7	Punktweiser Fehler eines worst of two assets Puts bei $S_1 = 40$, $S_2 = 40$ und $t = 0.5$, diskretisiert mit dem van Albada Limiter	46
8	Punktweiser Fehler eines worst of two assets Puts bei $S_1 = 40$, $S_2 = 40$ und $t = 0.5$, diskretisiert mit dem modifizierten van Leer Limiter	46
9	Punktweiser Fehler eines worst of two assets Puts bei $S_1 = 40$, $S_2 = 40$ und $t = 0.5$, diskretisiert mit dem modifizierter van Albada Limiter	47
10	Punktweiser Fehler eines worst of two assets Puts bei $S_1 = 40$, $S_2 = 40$ und $t = 0.5$, gelöst auf gradierten Gittern mit zentralen Differenzen und unterschiedlichen λ	47
11	Punktweiser Fehler eines worst of two assets Puts bei $S_1 = 40$, $S_2 = 40$ und $t = 0.5$, auf vollem Gitter mit dem upwind-Verfahren	48
12	Punktweiser Fehler eines worst of two assets Puts bei $S_1 = 40$, $S_2 = 40$ und $t = 0.5$, gelöst mit der Kombinationstechnik und upwind-Verfahren	48
13	Punktweiser Fehler eines worst of two assets Puts bei $S_1 = 40$, $S_2 = 40$ und $t = 0.5$, gelöst mit der reduzierten Kombinationstechnik und upwind-Verfahren	49
14	Benötigte Rechenzeiten zur Lösung mit verschiedenen Gittern, normiert auf volles Gitter mit Level 5	49

15	Werte eines asiatischen fixed strike Calls im Punkt $S = 60$, $A = 60$ mit $E = 50$ zum Zeitpunkt $t = 0.25$, gelöst mit dem van Leer Limiter und dem modifizierten van Leer Limiter	50
16	Werte eines asiatischen fixed strike Calls im Punkt $S = 60$, $A = 60$ mit $E = 60$ zum Zeitpunkt $t = 0.25$, gelöst mit dem van Albada Limiter und dem modifizierten van Albada Limiter	51
17	Verwendete Parameter für Test der Wandelanleihen	51
18	Werte einer Wandelanleihe im Punkt $S = 30$, $r = 0.15$ zum Zeitpunkt $t = 10$, diskretisiert mit dem van Leer Limiter	52
19	Werte einer Wandelanleihe im Punkt $S = 30$, $r = 0.15$ zum Zeitpunkt $t = 10$, diskretisiert mit dem van Leer Limiter und der reduzierten Kombinationstechnik	52
20	Werte einer Wandelanleihe im Punkt $S = 15$, $r = 0.15$ zum Zeitpunkt $t = 10$, diskretisiert mit dem van Albada Limiter	52
21	Werte einer Wandelanleihe im Punkt $S = 15$, $r = 0.15$ zum Zeitpunkt $t = 10$, diskretisiert mit dem van Albada Limiter und der reduzierten Kombinationstechnik	53

A Positives Koeffizienten Schema

Zvan et. al. [26, 727-731] haben für Triangulierungen gezeigt, unter welchen Bedingungen das modifizierte Limiter-Schema (52), angewendet auf die Derivate, positive Koeffizienten liefert. Diese Bedingung soll jetzt für quadratische Kontrollvolumen hergeleitet werden, wobei sich an die Vorgehensweise von Zvan et. al. gehalten wird. Wegen der besseren Übersicht gilt von der Bezeichnung her $U_{ij,up}^{k,n+1} = U_{up}^{n+1}$, sofern Missverständnisse ausgeschlossen sind.

Der Einfachheit halber wird nur der Konvektionsterm $\frac{\partial U}{\partial t} = -V\nabla U$ betrachtet. Wird dieser mit Schema (52) diskretisiert, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}
h^2 \left(\frac{U_{ij}^{n+1} - U_{ij}^n}{\Delta t} \right) &= \theta \sum_{k=l,r,u,d} \alpha_{ij}^k \left[U_{up}^{n+1} + \frac{\Psi(R_{ij}^k)}{2} (U_{down}^{n+1} - U_{up}^{n+1}) \right] \\
&+ \theta \sum_{k=l,r,u,d} \beta_{ij}^k \left[\frac{1}{2} (U_{up}^{n+1} + U_{down}^{n+1}) \right] \\
&+ (1 - \theta) \sum_{k=l,r,u,d} \alpha_{ij}^k \left[U_{up}^n + \frac{\Psi(R_{ij}^k)}{2} (U_{down}^n - U_{up}^n) \right] \\
&+ (1 - \theta) \sum_{k=l,r,u,d} \beta_{ij}^k \left[\frac{1}{2} (U_{up}^n + U_{down}^n) \right]. \tag{A.1}
\end{aligned}$$

Dabei ist $\alpha_{ij}^k = \min(\vec{L}_{ij}^k V, 0)$ und $\beta_{ij}^k = \max(\vec{L}_{ij}^k V, 0)$. Mit Gleichung (49) ergibt sich dann:

$$\begin{aligned}
h^2 \left(\frac{U_{ij}^{n+1} - U_{ij}^n}{\Delta t} \right) &= \theta \sum_{k=l,r,u,d} \alpha_{ij}^k \left[U_{up}^{n+1} + \frac{\Psi(R_{ij}^k)}{2R_{ij}^k} (U_{up}^{n+1} - U_{2up}^{n+1}) \right] \\
&+ \theta \sum_{k=l,r,u,d} \beta_{ij}^k \left[\frac{1}{2} (U_{up}^{n+1} + U_{down}^{n+1}) \right] \\
&+ (1 - \theta) \sum_{k=l,r,u,d} \alpha_{ij}^k \left[U_{up}^n + \frac{\Psi(R_{ij}^k)}{2R_{ij}^k} (U_{up}^n - U_{2up}^n) \right] \\
&+ (1 - \theta) \sum_{k=l,r,u,d} \beta_{ij}^k \left[\frac{1}{2} (U_{up}^n + U_{down}^n) \right]. \tag{A.2}
\end{aligned}$$

Dies lässt sich umformen zu

$$\begin{aligned}
h^2 \left(\frac{U_{ij}^{n+1} - U_{ij}^n}{\Delta t} \right) &= \theta \sum_{k=l,r,u,d} \left[\alpha_{ij}^k + \alpha_{ij}^k \frac{\Psi(R_{ij}^k)}{2R_{ij}^k} + \frac{\beta_{ij}^k}{2} \right] U_{up}^{n+1} \\
&+ \theta \sum_{k=l,r,u,d} \alpha_{ij}^k \frac{\Psi(R_{ij}^k)}{2R_{ij}^k} (-U_{2up}^{n+1}) + \theta \sum_{k=l,r,u,d} \frac{\beta_{ij}^k}{2} U_{down}^{n+1} \\
&+ (1-\theta) \sum_{k=l,r,u,d} \left[\alpha_{ij}^k + \alpha_{ij}^k \frac{\Psi(R_{ij}^k)}{2R_{ij}^k} + \frac{\beta_{ij}^k}{2} \right] U_{up}^n \\
&+ (1-\theta) \sum_{k=l,r,u,d} \alpha_{ij}^k \frac{\Psi(R_{ij}^k)}{2R_{ij}^k} (-U_{2up}^n) + (1-\theta) \sum_{k=l,r,u,d} \frac{\beta_{ij}^k}{2} U_{down}^n.
\end{aligned} \tag{A.3}$$

Mit $\bar{\alpha}_{ij}^k = \frac{\Delta t}{h^2} \alpha_{ij}^k$ und $\bar{\beta}_{ij}^k = \frac{\Delta t}{h^2} \beta_{ij}^k$ und der Tatsache, dass $\sum_{k=l,r,u,d} (\bar{\alpha}_{ij}^k + \bar{\beta}_{ij}^k) = 0$, ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\left[1 + \theta \sum_{k=l,r,u,d} \left(-\bar{\alpha}_{ij}^k \frac{\Psi(R_{ij}^k)}{2R_{ij}^k} + \frac{\bar{\beta}_{ij}^k}{2} \right) \right] U_{up}^{n+1} \\
&= \theta \sum_{k=l,r,u,d} \left(-\bar{\alpha}_{ij}^k \frac{\Psi(R_{ij}^k)}{2R_{ij}^k} U_{2up}^{n+1} + \frac{\bar{\beta}_{ij}^k}{2} U_{down}^{n+1} \right) \\
&+ \left[1 + (1-\theta) \sum_{k=l,r,u,d} \left(\bar{\alpha}_{ij}^k \frac{\Psi(R_{ij}^k)}{2R_{ij}^k} - \frac{\bar{\beta}_{ij}^k}{2} \right) \right] U_{up}^n \\
&+ (1-\theta) \sum_{k=l,r,u,d} \left(-\bar{\alpha}_{ij}^k \frac{\Psi(R_{ij}^k)}{2R_{ij}^k} U_{2up}^n + \frac{\bar{\beta}_{ij}^k}{2} U_{down}^n \right)
\end{aligned} \tag{A.4}$$

Durch $\bar{\alpha}_{ij}^k \leq 0$, $\bar{\beta}_{ij}^k \geq 0$ und $0 \leq \frac{\Psi(q)}{q} \leq 2$ (siehe Kapitel 4.2) muss für die Positivität aller Koeffizienten in (A.4)

$$(1-\theta) \sum_{k=l,r,u,d} \left(\bar{\alpha}_{ij}^k \frac{\Psi(R_{ij}^k)}{2R_{ij}^k} - \frac{\bar{\beta}_{ij}^k}{2} \right) \geq -1 \tag{A.5}$$

gelten, was sich letztlich zu

$$\sum_{k=l,r,u,d} \left(-\bar{\alpha}_{ij}^k + \frac{\bar{\beta}_{ij}^k}{2} \right) \leq \frac{1}{1-\theta} \tag{A.6}$$

vereinfacht. Es lässt sich nun beweisen, dass unter Bedingung (A.6) Schema (52) lokale Maximum- und Minimumprinzipien erfüllt. Mit

$U_{ij}^{max} = \max(U_{ij}^{k,n+1}, U_{ij}^{k,n}, U_{ij}^n)$, $k = l, r, u, d$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
& \left[1 + \theta \sum_{k=l,r,u,d} \left(-\bar{\alpha}_{ij}^k \frac{\Psi(R_{ij}^k)}{2R_{ij}^k} + \frac{\bar{\beta}_{ij}^k}{2} \right) \right] U_{up}^{n+1} \\
& \leq \theta \sum_{k=l,r,u,d} \left(-\bar{\alpha}_{ij}^k \frac{\Psi(R_{ij}^k)}{2R_{ij}^k} + \frac{\bar{\beta}_{ij}^k}{2} \right) U_{ij}^{max} \\
& + \left[1 + (1 - \theta) \sum_{k=l,r,u,d} \left(\bar{\alpha}_{ij}^k \frac{\Psi(R_{ij}^k)}{2R_{ij}^k} - \frac{\bar{\beta}_{ij}^k}{2} \right) \right] U_{ij}^{max} \\
& + (1 - \theta) \sum_{k=l,r,u,d} \left(-\bar{\alpha}_{ij}^k \frac{\Psi(R_{ij}^k)}{2R_{ij}^k} + \frac{\bar{\beta}_{ij}^k}{2} \right) U_{ij}^{max}, \tag{A.7}
\end{aligned}$$

was sich zu

$$\left[1 + \theta \sum_{k=l,r,u,d} \left(-\bar{\alpha}_{ij}^k \frac{\Psi(R_{ij}^k)}{2R_{ij}^k} + \frac{\bar{\beta}_{ij}^k}{2} \right) \right] U_{up}^{n+1} \tag{A.8}$$

$$\leq \left[1 + \theta \sum_{k=l,r,u,d} \left(-\bar{\alpha}_{ij}^k \frac{\Psi(R_{ij}^k)}{2R_{ij}^k} + \frac{\bar{\beta}_{ij}^k}{2} \right) \right] U_{ij}^{max} \tag{A.9}$$

vereinfacht. Daraus folgt schließlich

$$U_{up}^{n+1} \leq U_{ij}^{max}. \tag{A.10}$$

Somit wird das Maximumprinzip erfüllt. Der Beweis für das Minimumprinzip erfolgt analog. Mit $U_{ij}^{min} = \min(U_{ij}^{k,n+1}, U_{ij}^{k,n}, U_{ij}^n)$, $k = l, r, u, d$, ergibt sich dann

$$U_{up}^{n+1} \geq U_{ij}^{min}. \tag{A.11}$$

Erklärung

Ich erkläre, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und nur unter Verwendung der angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe.

Jena, 2. März 2007